COLECȚIA „MATEMATICĂ EXPLICATĂ”

LIMITE DE FUNCȚII

Două niveluri pentru aceeași problemă

IN LUCRU

Fascicula 1 • Exercițiile 2.1–2.42 • Soluții pe scurt și soluții extinse

Fiecare fișă oferă enunțul, o rezolvare rapidă, apoi explicații pentru simboluri, scopul metodei, transformări pas cu pas, verificare și concluzie.

Sursă de confruntare: culegerea „Limite de funcții”, C. Ionescu-Țiu, capitolul II, enunțuri la paginile tipărite 91–97 și soluții la paginile 106 și următoarele. Soluțiile din acest document sunt redactări didactice noi; nu reprezintă transcrierea paginilor cărții.

Stadiu real: 42 fișe redactate; 49 fișe rămase. Verificarea matematică finală și verificarea drepturilor editoriale sunt necesare înainte de publicare.

Cum se folosește manualul

Elevul care recunoaște metoda poate citi doar „Soluția pe scurt”. Elevul care nu recunoaște simbolurile sau transformarea trece direct la „Soluția extinsă”. Cele două versiuni duc la același rezultat.

Lecție transversală: împărțirea la numere apropiate de zero

Nu definim $\frac{5}{0}$. Scrierile 0^+ și 0^- NU sunt două numere, ci indică apropierea de zero prin valori pozitive, respectiv negative. Dacă numărătorul este un număr finit nenul, semnul limitei unui raport depinde de semnul numărătorului și de semnul numitorului foarte mic.

Numărător	Numitor tinde la	Limita raportului
pozitiv	0^+	$+\infty$
pozitiv	0^-	$-\infty$
negativ	0^+	$-\infty$
negativ	0^-	$+\infty$

Excepție majoră: dacă numărătorul tinde și el la 0, forma $\frac{0}{0}$ este nedeterminată și cere analiză. De exemplu, $\frac{x}{x}=1$ pentru $x\neq 0$, iar limita în $x=0$ este 1.

Regula editorială

Mai întâi comparăm enunțul cu scanarea, apoi metoda și rezultatul cu soluția tipărită; urmează verificarea independentă. Nu preluăm automat formulele cu ipoteze omise sau semne suspecte. Fiecare ediție se marchează „IN LUCRU” până la revizia finală.

FIȘA 2.1 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.1 — Semnul infinitului și limitele laterale

Enunț

$\lim(x\to 1^+) \frac{1}{x-1}$ și $\lim(x\to 1^-) \frac{1}{x-1}$

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 106.

A. Soluția pe scurt

1. Notăm $t=x-1$.

2. $x\to 1^+ \Leftrightarrow t\to 0^+$; atunci $\frac{1}{t}\to+\infty$.

3. $x \to 1^- \Leftrightarrow t \to 0^-$; atunci $\frac{1}{t} \to -\infty$.

4. Rezultate: $+\infty$, respectiv $-\infty$.

REZULTAT $+\infty$ și $-\infty$

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

lim = limită; $x \to 1^+$ și $x \to 1^-$ = apropierea din dreapta/stânga; ∞ = creștere fără margine, nu număr real obișnuit.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Verificăm semnul numitorului, apoi tendința modulului fracției; nu efectuăm împărțirea la zero.

Pasul 1. De ce nu înlocuim x=1?

Ar rezulta $\frac{1}{0}$, o împărțire nedefinită. Limita studiază valori diferite de 1, dar oricât de apropiate de 1. Zero nu este nici „pozitiv”, nici „negativ”; notațiile 0^+ și 0^- indică partea din care ne apropiem.

Pasul 2. Alegerea substituției

În expresie, elementul care se micșorează este $x-1$. Îl numim t; așa vedem mai clar că numitorul t se apropie de zero.

Pasul 3. Apropierea din dreapta

Dacă $x>1$, atunci $t>0$. Pentru $t=0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001$ obținem 10, 100, 1000. Fracția depășește orice prag pozitiv când t devine suficient de mic.

Pasul 4. Apropierea din stânga

Dacă $x<1$, atunci $t<0$. Pentru $t=-0{,}1,\ -0{,}01,\ -0{,}001$ obținem $-10,\ -100,\ -1000$. Valorile sunt din ce în ce mai mici, în sens negativ.

Pasul 5. Concluzie logică

Cele două limite laterale sunt diferite. Așadar limita bilaterală în x=1 nu există, deși ambele limite laterale există în sens extins.

Verificare și idee de reținut

$\frac{1}{0{,}01}=100$; $\frac{1}{-0{,}01}=-100$. Aceste exemple ilustrează, dar singure nu constituie demonstrația generală.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.2 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.2 — Polinomul și criteriul prin șiruri

Enunț

$\lim(x\to 1)\ (x^{10}+x+1)$

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 106.

A. Soluția pe scurt

1. Luăm orice șir $x_n\to 1$, cu $x_n\neq 1$.
2. Atunci $x_n^{10}\to 1$ și $x_n\to 1$.
3. Prin suma limitelor, $x_n^{10}+x_n+1\to 1+1+1=3$.
4. Conform criteriului prin șiruri: limita este 3.

REZULTAT 3

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

x_n = termenul n al unui șir; ∀ = „pentru orice”; f(x) = valoarea funcției la x; x^i = înmulțire repetată.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Urmăm exact metoda din enunț: folosim șiruri, nu doar înlocuirea formală x=1.

Pasul 1. Ce este un șir?

Un șir este o listă ordonată de numere $x_1, x_2, \ldots$. Simbolul x_n desemnează termenul de pe poziția n. Scrierea $x_n\to 1$ spune că termenii se apropie oricât de mult de 1 când n crește.

Pasul 2. De ce alegem un șir oarecare?

Definiția cerută în problemă spune că aceeași valoare trebuie obținută pentru ORICE șir din domeniu, cu $x_n\neq 1$, care converge la 1. Un singur exemplu de șir nu ar fi suficient.

Pasul 3. Trecerea la limită

Deoarece $x_n\to 1$, regula produsului repetat ne dă $x_n^{10}\to 1^{10}=1$. Constanta 1 are mereu limita 1. Prin regula sumei, totalul converge la 3.

Pasul 4. O verificare algebrică suplimentară

Putem scrie $f(x)-3=(x-1)(x^9+x^8+\ldots+x+2)$. În apropierea lui 1, a doua paranteză este mărginită, iar prima tinde la 0. Prin urmare $f(x)-3\to 0$.

Pasul 5. Atenție la raționament

Calculul f(1)=3 sugerează răspunsul; demonstrația cerută arată că toate șirurile convergente spre 1 duc la aceeași valoare.

Verificare și idee de reținut

Pentru x=0,99 și x=1,01 valorile sunt apropiate de 3; demonstrația prin șiruri este însă cea decisivă.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.3 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.3 — Radicali cubici cu ritmuri de creștere diferite

Enunț

lim(x→+∞) [∛(x+∛(x²)) − ∛(x³−∛(x²))]

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 106.

A. Soluția pe scurt

1. Primul termen crește de ordinul x^($\frac{1}{3}$).
2. Al doilea termen crește de ordinul x.
3. Cum x este mult mai mare decât x^($\frac{1}{3}$), diferența tinde la $-\infty$.

REZULTAT $-\infty$

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

∛ = rădăcină cubică; x^($\frac{2}{3}$)=∛(x²); +∞ = x crește fără limită.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Comparăm ordinele de mărime înainte de a încerca transformări laborioase.

Pasul 1. Citirea radicalilor

∛u înseamnă numărul al cărui cub este u. De pildă, ∛8=2. Atenție: radicalul cubic este definit și pentru numere negative.

Pasul 2. Identificarea termenilor dominanți

Când x devine foarte mare, $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ este mai mic decât x. În prima rădăcină, termenul principal este x; în a doua, termenul principal este x^3.

Pasul 3. Comparația creșterilor

Din prima rădăcină rezultă o mărime comparabilă cu $x^{\frac{1}{3}}$; din a doua, una comparabilă cu x.

Raportul $x^{\frac{1/3}{x}}=x^{-\frac{2}{3}}$ tinde la 0.

Pasul 4. Argument de ordin

Putem rescrie expresia ca $x\cdot[(\sqrt[3]{x+x^{\frac{2}{3}}})/x-(\sqrt[3]{x^3-x^{\frac{2}{3}}})/x]$. Prima fracție tinde la 0, a doua la 1, deci paranteza tinde la -1. Înmulțirea cu $x\to+\infty$ duce la $-\infty$.

Pasul 5. Intuiție

Diferența dintre un număr care crește ca rădăcina cubică și unul care crește ca x devine negativă fără limită.

Verificare și idee de reținut

La x=1000, primul radical este de ordinul 10, iar al doilea este aproape 1000; diferența e puternic negativă.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.4 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.4 — Funcție definită prin două formule

Enunț

f(x)=e^x pentru x≤0; f(x)=cos x pentru x>0. Calculați lim(x→0) f(x).

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 106.

A. Soluția pe scurt

1. Limita din stânga: $\lim_{x\to0^-}e^x=e^0=1$.
2. Limita din dreapta: $\lim_{x\to0^+}\cos x=\cos 0=1$.
3. Limitele laterale coincid, deci limita bilaterală este 1.

REZULTAT 1

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

e^x = funcția exponențială; cos x = cosinus; ≤ = „mai mic sau egal”.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Calculăm separat stânga și dreapta deoarece formula funcției se schimbă la 0.

Pasul 1. Ce este o funcție pe cazuri?

Când x este cel mult 0, folosim e^x; când x este mai mare decât 0, folosim cos x. Nu aplicăm aceeași formulă pe ambele părți.

Pasul 2. Simbolurile

≤ înseamnă mai mic sau egal, iar cos este funcția cosinus. e este numărul matematic aproximativ 2,71828; e^0=1.

Pasul 3. Limita din stânga

Valorile x<0 care se apropie de 0 se calculează cu e^x. Funcția exponențială este continuă, astfel că valorile tind la e^0=1.

Pasul 4. Limita din dreapta

Pentru valori x>0 se aplică cos x. Cosinusul este continuu, de aceea cos x→cos 0=1.

Pasul 5. Criteriul final

O funcție are limită bilaterală într-un punct dacă limitele ei laterale există și sunt egale. Aici ambele sunt 1.

Verificare și idee de reținut

f(−0,01)≈0,99005 și f(0,01)≈0,99995, ambele aproape de 1.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.5 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.5 — Două limite trigonometrice lângă $\frac{\pi}{2}$

Enunț

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\pi-2x}^2$; b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$ tg(5x)/tg(3x)

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 107.

A. Soluția pe scurt

1. a) $t=x-\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1-\sin x=1-\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$, $(\pi-2x)^2=4t^2 \Rightarrow \frac{1}{8}$.

2. b) $tg(5x)/tg(3x)=\sin(5x)\cos(3x)/[\cos(5x)\sin(3x)]$.

3. Punem $x=\frac{\pi}{2}+t$ și folosim $\sin \frac{u}{u}\to 1 \Rightarrow \frac{3}{5}$.

REZULTAT a) 1/8; b) 3/5

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

π = aproximativ 3,14159; sin = sinus; cos = cosinus; tg = tangentă.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Transformăm apropierea de $\frac{\pi}{2}$ în apropiere de 0 și aplicăm limita fundamentală $\sin \frac{u}{u}\to 1$.

Pasul 1. De ce schimbăm variabila?

Punctul $\frac{\pi}{2}$ este incomod; notăm $t=x-\frac{\pi}{2}$, astfel $t\to 0$. Putem aplica formule elementare construite în jurul lui 0.

Pasul 2. Partea a — identitate trigonomterică

$\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$, deci $1-\sin x=1-\cos t$. Formula $1-\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$ transformă diferența într-un pătrat.

Pasul 3. Partea a — simplificare

$\pi-2x=-2t$, deci numitorul este $4t^2$. Raportul devine $(\frac{1}{8})\cdot[\sin(\frac{t}{2})/(\frac{t}{2})]^2$. Știm că factorul din paranteză tinde la 1: limita este $\frac{1}{8}$.

Pasul 4. Partea b — de ce evităm tangentele direct?

$tg(3x)$ și $tg(5x)$ nu sunt definite exact la $x=\frac{\pi}{2}$. Scriem $tg\, u=\sin u/\cos u$ și simplificăm prin identități.

Pasul 5. Partea b — limita de bază

Cu $x=\frac{\pi}{2}+t$, raportul se transformă într-un raport echivalent cu $\sin(3t)/\sin(5t)$. Descompunem $\frac{\sin(3t)/(3t)}{\sin(5t)/(5t)}\cdot\frac{3}{5}$, iar cei doi factori sinus/t tind la 1.

Verificare și idee de reținut

Simbolul $\frac{0}{0}$ care apare prin înlocuire arată o nedeterminare, nu un rezultat.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.6 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.6 — Arcsinus și simplificarea unui factor comun

Enunț

$\lim_{x\to -2} \arcsin(x+2)/(x^2+2x)$

Referință în scanare: Enunț: p. 91; soluție: p. 107.

A. Soluția pe scurt

1. Notăm $t=x+2\to 0$, deci $x=t-2$.

2. Raportul = $[\arcsin \frac{t}{t}]\cdot[\frac{1}{t-2}]$.

3. $\arcsin \frac{t}{t}\to 1$, $\frac{1}{t-2}\to -\frac{1}{2}$; rezultatul este $-\frac{1}{2}$.

REZULTAT $-1/2$

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

arcsin = funcția inversă locală a sinusului; t = variabilă auxiliară; radian = unitate pentru unghi.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Identificăm forma $\frac{0}{0}$ și o descompunem în limita cunoscută $\arcsin \frac{t}{t}$ și un factor obișnuit.

Pasul 1. Ce este arcsin?

arcsin t este unghiul (în radiani) al cărui sinus este t, pentru t între -1 și 1. Nu este același lucru cu 1/sin t.

Pasul 2. De ce apare $\frac{0}{0}$?

Când $x\to -2$, numărătorul tinde la $\arcsin 0=0$, iar $x^2+2x=x(x+2)$ tinde la 0. Nu înlocuim direct.

Pasul 3. Alegem t=x+2

Numărătorul devine arcsin t, iar numitorul (t−2)t. Acum putem descompune fracția în [arcsin $\frac{t}{t}$]·[$\frac{1}{t-2}$].

Pasul 4. Aplicăm limita standard

Pentru t→0, arcsin $\frac{t}{t}$→1, fapt care rezultă din comportamentul inversului funcției sinus în jurul originii.

Pasul 5. Calculăm factorul rămas

$\frac{1}{t-2}$→$\frac{1}{-2}$=−$\frac{1}{2}$. Produsul limitelor este −$\frac{1}{2}$.

Verificare și idee de reținut

Pentru t=0,01, arcsin(t)/[t(t−2)] este apropiat de −0,5.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.7 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.7 — Logaritmul unei expresii apropiate de 1

Enunț

lim(x→+∞) x·[ln(1+x)−ln x]

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 107.

A. Soluția pe scurt

1. ln(1+x)−ln x = ln($\frac{1+x}{x}$)=ln(1+$\frac{1}{x}$).
2. Punem t=$\frac{1}{x}$→0^+; expresia = ln(1+t)/t.
3. Limita fundamentală ln(1+t)/t→1.

REZULTAT 1

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

ln = logaritm natural; ln($\frac{A}{B}$)=ln A−ln B pentru A,B pozitive; t=$\frac{1}{x}$.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Combinăm logaritmii înainte de a trece la limită.

Pasul 1. De ce nu scădem două infinituri?

Atât ln(1+x), cât și ln x cresc fără limită. Diferența lor este de forma nedeterminată $\infty-\infty$. Trebuie întâi să le combinăm.

Pasul 2. Proprietatea logaritmilor

Pentru A>0 și B>0, ln A−ln B=ln($\frac{A}{B}$). De aici apare ln(1+$\frac{1}{x}$).

Pasul 3. Schimbarea variabilei

Când x crește fără limită, t=$\frac{1}{x}$ scade către 0 prin numere pozitive. Deoarece x=$\frac{1}{t}$, produsul devine ln(1+t)/t.

Pasul 4. Limita fundamentală

Raportul ln(1+t)/t tinde la 1 când t→0. Se poate arăta și prin estimarea $\frac{t}{1+t}\leq\ln(1+t)\leq t$ pentru t>0.

Pasul 5. Concluzia

Expresia din enunț tinde la 1, deși ambii logaritmi, separați, cresc fără limită.

Verificare și idee de reținut

La x=1000, avem 1000·ln(1,001), aproape de 1.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.8 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.8 — Puterea unui cosinus și nedeterminarea $\frac{0}{0}$

Enunț

lim(x→0) $\frac{1-\cos^n x}{x^2}$, n∈N

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 107.

A. Soluția pe scurt

1. $1-\cos^n x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cdots+\cos^{n-1} x)$.

2. $\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}$.

3. Suma celor n termeni tinde la n; limita este $\frac{n}{2}$.

REZULTAT n/2

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

N = mulțimea numerelor naturale; $\cos^n x=(\cos x)^n$; ⋯ = termeni intermediari.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Extragem factorul $1-\cos x$, pentru care cunoaștem o limită fundamentală.

Pasul 1. Citirea exponentului

$\cos^n x$ înseamnă (cos x) ridicat la puterea n, nu cos(nx). Numărul n este natural și fix în această limită.

Pasul 2. Identificăm obstacolul

Pentru $x\to 0$, numărătorul și numitorul tind la 0. Obținem o formă $\frac{0}{0}$, care cere transformare.

Pasul 3. Factorizarea

Formula $1-a^n=(1-a)(1+a+\ldots+a^{n-1})$ se aplică pentru $a=\cos x$.

Pasul 4. Separarea limitelor

Primul factor, $\frac{1-\cos x}{x^2}$, tinde la $\frac{1}{2}$. În al doilea, fiecare dintre cei n termeni tinde la 1; suma tinde la n.

Pasul 5. Rezultatul

Înmulțim: $(\frac{1}{2})\cdot n=\frac{n}{2}$. Nu confundăm n, care rămâne fix, cu variabila x, care tinde la 0.

Verificare și idee de reținut

Pentru n=1 obținem $\frac{1}{2}$; pentru n=2 obținem 1, fapt verificabil cu identitatea $1-\cos^2 x=\sin^2 x$.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.9 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.9 — Diferență de radicali cubici: conjugata cubică

Enunț

$\lim(x\to+\infty)\ [\sqrt[3]{(x+\sqrt[3]{(x^2)})}-\sqrt[3]{(x-\sqrt[3]{(x^2)})}]$

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 108.

A. Soluția pe scurt

1. $A=\sqrt[3]{(x+\sqrt[3]{(x^2)})}$, $B=\sqrt[3]{(x-\sqrt[3]{(x^2)})}$.

2. $A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}=2\sqrt[3]{\frac{x^2}{A^2+AB+B^2}}$.

3. Împărțim la $x^{(\frac{2}{3})}$; numitorul tinde la 3, numărătorul la 2.

4. Limita este $\frac{2}{3}$.

REZULTAT 2/3

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

A și B = denumiri auxiliare; $\sqrt[3]{}$ = radical cubic; formula A^3-B^3.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Folosim „conjugata” pentru cuburi, adică suma A^2+AB+B^2, pentru a elimina diferența radicalilor.

Pasul 1. De ce nu sunt cele două rădăcini egale?

Fiecare rădăcină crește asemenea lui $x^{(\frac{1}{3})}$, dar diferența lor poate tinde la un număr finit.

Înlocuirea cu „$\infty-\infty$” nu rezolvă nimic.

Pasul 2. Formula de diferență a cuburilor

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$. O reorganizăm pentru a găsi $A-B$, deoarece acesta este exact obiectul limitei.

Pasul 3. Calculăm cuburile

$A^3=x+\sqrt[3]{(x^2)}$, $B^3=x-\sqrt[3]{(x^2)}$; diferența este $2\sqrt[3]{(x^2)}=2x^{(\frac{2}{3})}$, pentru $x>0$.

Pasul 4. Normalizarea

$\frac{A}{x}$^($\frac{1}{3}$)=∛(1+x^($-\frac{1}{3}$))→1 și $\frac{B}{x}$^($\frac{1}{3}$)=∛(1−x^($-\frac{1}{3}$))→1.

Pasul 5. Încheiem calculul

Împărțim sus și jos la x^($\frac{2}{3}$). Numărătorul devine 2; fiecare termen A^2, AB, B^2 din numitor devine 1 la limită. Rezultatul este $\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$.

Verificare și idee de reținut

O diferență de doi termeni mari poate avea limită finită; aici $\frac{2}{3}$.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.10 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.10 — Radicali cu un parametru real

Enunț

lim(x→+∞) [√(m x^2+2x+1)−√(x^2+1)], m∈R

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 108–109.

A. Soluția pe scurt

1. Dacă m<0, funcția nu e definită pentru x suficient de mare: limita nu are sens în R.

2. Dacă 0≤m<1, domină (√m−1)x, deci limita este −∞.

3. Dacă m=1, raționalizăm: $\frac{2x}{\sqrt{(x^2+2x+1)}+\sqrt{(x^2+1)}}$→1.

4. Dacă m>1, limita este +∞.

REZULTAT m<0: nedefinit; 0≤m<1: −∞; m=1: 1; m>1: +∞

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

m∈R = m este număr real; √ = rădăcină pătrată; „raționalizare” = înmulțirea cu expresia conjugată.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Întâi analizăm domeniul, apoi coeficienții dominanți, iar în cazul în care se anulează folosim conjugata.

Pasul 1. Ce este un parametru?

m nu este variabila limitei; rămâne fix în timp ce x crește. Răspunsul poate fi diferit pentru valori diferite ale lui m.

Pasul 2. Mai întâi domeniul

Un radical pătrat real cere expresie nenegativă. Dacă $m<0$, termenul $m\,x^2$ domină și devine negativ pentru x mari; nu avem funcție reală în apropierea lui $+\infty$.

Pasul 3. Cazul $0\le m<1$

Primul radical este aproximativ $x\sqrt{m}$ (pentru $m=0$, de ordinul $\sqrt{x}$), iar al doilea este aproximativ x. Pentru $\sqrt{m}<1$, diferența devine negativă fără limită.

Pasul 4. Cazul $m>1$

$\sqrt{m}>1$, deci primul radical crește mai repede decât al doilea: limita este $+\infty$.

Pasul 5. Cazul delicat $m=1$

Termenii principali, ambii de ordin x, se anulează. Înmulțim sus și jos cu suma radicalilor; diferența pătratelor este 2x. Împărțim apoi numărătorul și numitorul la x și obținem $\frac{2}{1+1}=1$.

Verificare și idee de reținut

Exemplu $m=1$: $\sqrt{(x^2+2x+1)}=x+1$ pentru $x>0$, deci expresia devine $x+1-\sqrt{(x^2+1)}\to 1$.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.11 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.11 — Rădăcini de ordine diferite lângă x=1

Enunț

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{(1/p)}-1}{\left(x^q-1\right)^{(1/r)}},\quad p,r,q\in\mathbb{N},\ p,r\ge 2$$

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 109.

A. Soluția pe scurt

1. $x^{\left(\frac{1}{p}\right)}-1=(x-1)/\left(x^{\left(\frac{p-1}{p}\right)}+\cdots+x^{\left(\frac{1}{p}\right)}+1\right)$.
2. $x^q-1=(x-1)(1+x+\cdots+x^{(q-1)})$.

3. Raportul este de ordinul $|x-1|^{(1-\frac{1}{r})}$, care tinde la 0.

REZULTAT 0

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

p, q, r = numere naturale fixe; $\frac{1}{r}$ = exponent fracționar; „de ordinul” = comportament comparabil al mărimilor.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Exprimăm ambii termeni prin factorul comun $x-1$ și comparăm puterile lui.

Pasul 1. Ce înseamnă indicele radicalului?

$x^{(\frac{1}{p})}$ este radicalul de ordin p din x. În numitor avem radicalul de ordin r al expresiei x^q-1.

Pasul 2. Atenție la domeniu

Dacă r este par, numitorul real există lângă 1 numai pentru $x>1$. Dacă r este impar, sunt posibile ambele părți, în condițiile uzuale de definiție.

Pasul 3. Diferența de puteri

Identitatea $x-1=(x^{(\frac{1}{p})}-1)[1+x^{(\frac{1}{p})}+\cdots+x^{(\frac{p-1}{p})}]$ arată că numărătorul se comportă ca $\frac{x-1}{p}$.

Pasul 4. Numitorul

Din $x^q-1=(x-1)(1+x+\ldots+x^{(q-1)})$ și suma care tinde la q, rezultă că numitorul este de ordinul $|x-1|^{(\frac{1}{r})}$.

Pasul 5. Comparăm puterile

Raportul este de ordinul $|x-1|^{(1-\frac{1}{r})}$, iar exponentul $1-\frac{1}{r}$ este pozitiv deoarece $r\geq 2$. Astfel raportul tinde la 0.

Verificare și idee de reținut

Pentru $p=r=q=2$, $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{}}(x^2-1)\to 0$, lucru vizibil din puterea pozitivă a lui $x-1$.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.12 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.12 — Raport algebric cu parametri: caz generic și excepții

Enunț

$$\lim_{x\to a}\frac{a^m\left(x^n+b\right)-x^m\left(a^n+b\right)}{a^n\left(x^m+b\right)-x^n\left(a^m+b\right)}$$

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 109–110.

A. Soluția pe scurt

1. Notăm N(x) și D(x); observăm N(a)=D(a)=0.

2. Pentru a≠0, m,n naturali pozitivi, calculăm N′(a)=(n−m)a^(m+n−1)−mb a^(m−1).

3. D′(a)=(m−n)a^(m+n−1)−nb a^(n−1).

4. Dacă D′(a)≠0, limita =$N'\frac{a}{D}'(a)$.

5. Cazurile în care D′(a)=0, a=0 sau expresia nu are puncte de definiție cer analiză separată.

REZULTAT Generic: [(n−m)a^(m+n−1)−mb a^(m−1)] / [(m−n)a^(m+n−1)−nb a^(n−1)]

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

a,b = parametri; m,n = exponenți; N = numărător; D = numitor; N′(a) indică coeficientul de ordinul întâi la x=a.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Factorizăm prin x−a și verificăm dacă termenul liniar din numitor este nenul; apoi tratăm separat degeneratele.

Pasul 1. De ce este dificil?

La x=a, atât numărătorul, cât și numitorul sunt zero, indiferent de m și n. Nu avem voie să decidem rezultatul prin împărțire $\frac{0}{0}$.

Pasul 2. Metoda originală

Cartea utilizează limitele $\frac{x^k-a^k}{x-a}$=k a^(k−1), pentru k natural. Aceeași idee este derivata unei puteri, însă poate fi demonstrată prin factorizarea diferenței de puteri.

Pasul 3. Calculăm coeficientul liniar din numărător

Scriem $N(x)=a^m(x^n-a^n)-(a^n+b)(x^m-a^m)$. După împărțirea la $x-a$ și trecerea la limită, obținem $N'(a)$.

Pasul 4. Calculăm coeficientul liniar din numitor

Analog $D(x)=a^n(x^m-a^m)-(a^m+b)(x^n-a^n)$. Rezultatul după împărțirea la $x-a$ este $D'(a)$.

Pasul 5. Condiția adesea omisă

Raportul limitelor $\left(\frac{N}{D}\right)'(a)$ poate fi folosit NUMAI dacă $D'(a)\neq 0$. Altfel trebuie să studiem factorii de ordin superior; un răspuns universal ar fi greșit.

Pasul 6. Câteva cazuri speciale

Dacă $m=n$ și $b\neq 0$, unde este definit raportul, acesta este identic 1. Dacă $b=0$, $m\neq n$ și $a\neq 0$, raportul este identic -1. Pentru $a=0$ și $b\neq 0$, raportul se simplifică la x^(m−n) (pentru exponenți pozitivi), deci limita depinde de comparația m cu n și, la puteri negative, de partea de apropiere.

Verificare și idee de reținut

Test: cu $m=n$ și $b\neq 0$, raportul se reduce la 1; formula generică îl confirmă atunci când este aplicabilă.

Notă de control editorial

ATENȚIE EDITORIALĂ: enunțul nu precizează toate ipotezele asupra lui a și b. Formula tipărită reprezintă doar cazul în care numitorul limită este nenul; această fișă NU pretinde să epuizeze toate degeneratele.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.13 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.13 — Diferență între două rădăcini din cosinus

Enunț

$\lim(x\to 0)\ \dfrac{(\cos x)^{(1/m)}-(\cos x)^{(1/n)}}{\sin^2}$ x, m,n∈N*

Referință în scanare: Enunț: p. 92; soluție: p. 110–111.

A. Soluția pe scurt

1. Pentru orice $p\geq 1$: $\dfrac{(\cos x)^{(1/p)}-1}{\sin^2 x}\to -\dfrac{1}{2p}$.

2. Scriem numărătorul ca [(cos x)^($\frac{1}{m}$)−1]−[(cos x)^($\frac{1}{n}$)−1].

3. Rezultat: $-\frac{1}{2m}+\frac{1}{2n}=\frac{m-n}{2mn}$.

REZULTAT (m−n)/(2mn)

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

m,n = ordinele radicalilor; sin²x=(sin x)²; N* = numere naturale pozitive.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Adăugăm și scădem aceeași constantă 1, apoi transformăm fiecare rădăcină cu formula diferenței puterilor.

Pasul 1. Ce înseamnă rădăcina de ordin m?

(cos x)^($\frac{1}{m}$) este numărul a cărui putere m este cos x. Aproape de 0, cos x este pozitiv, deci aceste rădăcini reale sunt bine definite.

Pasul 2. De ce apar două forme $\frac{0}{0}$?

Fiecare radical tinde la 1, astfel diferența tinde la 0; sin²x tinde și el la 0.

Pasul 3. Separăm expresia

Adăugăm și scădem 1: diferența devine [radical_m−1]−[radical_n−1]. Aceste două rapoarte au forme standard.

Pasul 4. Formula de bază

Pentru p natural, y=(cos x)^($\frac{1}{p}$); cum y^p=cos x, avem (y−1)(1+y+⋯+y^(p−1))=cos x−1. Împărțim la sin² x.

Pasul 5. Trecem la limită

Suma celor p termeni tinde la p, iar $\frac{\cos x-1}{\sin^2}$ x→$-\frac{1}{2}$. Prin urmare $\frac{(\cos x)^{(}1/p)-1}{\sin^2 x}\to-\frac{1}{2p}$.

Pasul 6. Rezultatul

Scădem cele două limite și obținem $\frac{m-n}{2mn}$.

Verificare și idee de reținut

Pentru m=n, numărătorul este zero, iar formula dă 0, cum trebuie.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.14 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.14 — Limita exponențială fundamentală pentru sinus și cosinus

Enunț

lim(n→∞) [cos($\frac{x}{n}$)+a sin($\frac{x}{n}$)]^n, x,a constante reale

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 111.

A. Soluția pe scurt

1. cos($\frac{x}{n}$)=1+o($\frac{1}{n}$); sin($\frac{x}{n}$)=$\frac{x}{n}$+o($\frac{1}{n}$).

2. Baza este 1+$\frac{ax}{n}$+o($\frac{1}{n}$).

3. [1+$\frac{ax}{n}$+o($\frac{1}{n}$)]^n→e^(ax).

REZULTAT e^(ax)

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

n→∞ = n crește fără limită; o($\frac{1}{n}$) = termen mult mai mic decât $\frac{1}{n}$; e≈2,71828.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Căutăm dacă expresia se poate scrie $(1+u_n)^n$ și determinăm limita lui n u_n.

Pasul 1. Ce variază?

n este numărul natural care tinde la infinit; x și a rămân fixe. Expresia are o putere n, în timp ce baza se apropie de 1.

Pasul 2. Recunoaștem o formă 1^∞

Nu înseamnă automat 1. O bază aproape de 1, ridicată la un exponent tot mai mare, poate avea limită diferită de 1.

Pasul 3. Aproximăm baza

Pentru u aproape de 0, sin $\frac{u}{u}$→1 și $\frac{\cos u - 1}{u}$→0. Cu u=$\frac{x}{n}$, rezultă cos($\frac{x}{n}$)+a sin($\frac{x}{n}$)=1+$\frac{ax}{n}$+o($\frac{1}{n}$).

Pasul 4. Aplicăm regula exponențială

Dacă $n \cdot u_n \to L$ și $1+u_n>0$ pentru n mari, atunci $(1+u_n)^n \to e^L$. Aici L=ax.

Pasul 5. Concluzia

Limita este e^(ax). Pentru a=0, se obține 1; pentru x=0, baza este 1 și rezultatul este tot 1.

Verificare și idee de reținut

Aproximare: pentru a=x=1 și n=1000, baza este ≈1,001, iar puterea este aproape de e.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.15 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.15 — Parametru și eroare de semn în soluția tipărită

Enunț

$\lim_{x\to+\infty} x\cdot[\sqrt{(a\,x^2+6x+10)}-(a\,x+3)]$, $a\in R$

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 111–112.

A. Soluția pe scurt

1. a<0: expresia nu este reală pentru x suficient de mare.

2. a=0: limita este +∞.

3. 0<a<1: termenul principal este $(\sqrt{a}-a)x^2$; limita este +∞.

4. a=1: raționalizăm; $\frac{x}{\sqrt{(x^2+6x+10)}+(x+3)} \to \frac{1}{2}$.

5. a>1: termenul principal este $(\sqrt{a}-a)x^2<0$; limita este −∞.

REZULTAT a<0: nedefinit real; 0≤a<1: +∞; a=1: 1/2; a>1: −∞

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

~ = același termen dominant în limita considerată; a∈R = parametru real; radicalul pătrat cere radicand≥0.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Separăm cazurile după semnul coeficientului dominant $\sqrt{a}-a$; la a=1 folosim conjugata.

Pasul 1. Înțelegerea parametrului

a este fix, iar x crește spre +∞. Nu putem trata toate valorile lui a la fel, fiindcă radicandul și termenul a x depind de el.

Pasul 2. Domeniul pentru a<0

Pentru x mare, termenul a x^2 este negativ și domină 6x+10. Sub radical apare un număr negativ, deci nu există o limită reală pentru $x \to +\infty$.

Pasul 3. Cazul a=0

Expresia este $x[\sqrt{(6x+10)}-3]$. Pentru x mare, paranteza este pozitivă și crește asemenea lui √x; produsul crește spre $+\infty$.

Pasul 4. Cazurile a>0, a≠1

$\sqrt{(a\,x^2+6x+10)} \sim \sqrt{a}\cdot x$ pentru x>0. Așadar diferența este de ordinul $(\sqrt{a}-a)x$, iar înmulțirea cu x dă $(\sqrt{a}-a)x^2$. Pentru 0<a<1, √a>a, deci semn pozitiv; pentru a>1, √a<a, deci semn negativ.

Pasul 5. Cazul special a=1

$\sqrt{(x^2+6x+10)}-(x+3)=\frac{(x^2+6x+10)-(x+3)^2}{\sqrt{(x^2+6x+10)}+(x+3)}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+6x+10)}+(x+3)}$. După înmulțirea cu x obținem limita $\frac{1}{2}$.

Pasul 6. Controlul erorii tipărite

Scanarea soluției (p. 112) afișează semnele opuse pentru intervalele 0<a<1 și a>1, deși expresia algebrică tipărită chiar înainte indică invers. Verificarea cu $a=\frac{1}{4}$ și a=4 confirmă semnele explicate aici.

Verificare și idee de reținut

x=10000: pentru $a=\frac{1}{4}$ expresia este foarte mare și pozitivă; pentru a=4 este foarte mare și negativă. Aceste controale verifică sensul semnelor.

Notă de control editorial

CORECȚIE CRITICĂ: soluția tipărită pe p.112 pare să inverseze $+\infty$ și $-\infty$ între 0<a<1 și a>1. Corecția necesită verificare editorială independentă înainte de publicare.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.16 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.16 — Putere cu exponent care diverge

Enunț

lim(x→0) [(1+sin 2x)/cos 2x]^(cosec x)

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 112.

A. Soluția pe scurt

1. Baza→1, exponentul cosec x=1/sin x devine nemărginit.
2. Luăm logaritmul: cosec x·ln[(1+sin 2x)/cos 2x].
3. ln(bază)∼2x; sin x∼x. Logaritmul limitei→2.
4. Rezultatul este e^2.

REZULTAT e^2

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

cosec x =1/sin x; ln = logaritm natural; $e^2 \approx 7{,}389$; o(x) = termen neglijabil față de x.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Transformăm puterea 1^∞ prin logaritm și folosim limitele trigonometrice fundamentale.

Pasul 1. Ce este cosec?

cosec x=1/sin x este cosecanta. Se definește când sin x≠0. În vecinătatea lui 0, expresia este definită pentru x nenul suficient de mic.

Pasul 2. Identificarea formei

Baza tinde la 1, iar exponentul are modul tot mai mare. Forma 1^∞ cere transformare; nu scriem 1 ca răspuns.

Pasul 3. De ce folosim logaritmul?

Pentru A>0, ln(A^B)=B·ln A. Logaritmul transformă o putere într-un produs, de obicei mai ușor de calculat.

Pasul 4. Aproximarea bazei

sin 2x∼2x, cos 2x=1+o(x), deci $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$=1+2x+o(x). Atunci ln(bază)=2x+o(x).

Pasul 5. Aproximăm exponentul

cosec x=1/sin x și sin x∼x; produsul [2x+o(x)]/sin x tinde la 2.

Pasul 6. Revenim la putere

Dacă ln L=2, atunci $L=e^2$. Baza este pozitivă în apropierea lui zero, deci logaritmul este legitim.

Verificare și idee de reținut

Când x>0 foarte mic, baza depășește 1, iar exponentul este pozitiv și mare; e^2 este plauzibil.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.17 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.17 — Compararea puterilor în radicali diferiți

Enunț

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3-1}+\sqrt{x-1}}$

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 113.

A. Soluția pe scurt

1. Numărător: $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{4}}$.
2. Numitor: $(x^3-1)^{\frac{1}{4}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}$.
3. Împărțim totul la $x^{\frac{3}{4}}$.
4. Doar termenii de ordin $x^{\frac{3}{4}}$ rămân; limita este 1.

REZULTAT 1

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt{}$=radical de ordin 2; $\sqrt[3]{}$=ordin 3; $\sqrt[4]{}$=ordin 4; $x^{\frac{p}{q}}$=rădăcină/putere fracționară.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Căutăm cel mai mare exponent și împărțim cu puterea corespunzătoare.

Pasul 1. Ce înseamnă ordinul unei puteri?

$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$, iar $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$. Exponentul $\frac{3}{4}$ este cel mai mare dintre $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$.

Pasul 2. Termenul dominant

Când $x\to\infty$, puterea cu exponentul cel mai mare crește mai repede. Alegem $x^{\frac{3}{4}}$ drept factor de normalizare pentru numărător și numitor.

Pasul 3. Normalizăm numărătorul

După împărțire obținem $x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{12}}+1$. Primele două puteri tind la zero.

Pasul 4. Normalizăm numitorul

$(x^3-1)^{\frac{1/4}{x}}(\frac{3}{4})=(1-\frac{1}{x^3})^(\frac{1}{4})\to 1$. Al doilea termen, $\sqrt{\frac{x-1}{x}}^(\frac{3}{4})$, este de ordinul $x^(-\frac{1}{4})\to 0$.

Pasul 5. Rezultatul

Raportul limitelor normalizate este $\frac{0+0+1}{1+0}=1$.

Verificare și idee de reținut

Nu adunăm exponenții unor termeni legați prin „+”; comparăm fiecare termen separat.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.18 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.18 — Diferențe de cosinus cu parametri

Enunț

$\lim(x\to 0)\ \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{\cos(cx)-\cos(dx)}$, $a,b,c,d\in R\setminus\{0\}$, $|c|\neq|d|$

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 113.

A. Soluția pe scurt

1. $\cos(ax)-\cos(bx)=[1-\cos(bx)]-[1-\cos(ax)]$.

2. $\frac{1-\cos(kx)}{x^2}\to\frac{k^2}{2}$.

3. Limita $=\frac{(b^2-a^2)/2}{(d^2-c^2)/2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

REZULTAT $(a^2-b^2)/(c^2-d^2)$

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

$|c|$ = valoarea absolută a lui c; c^2 = c înmulțit cu sine însuși; cos = cosinus.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Transformăm diferențele de cosinus în expresii $1-\cos$, cunoscute din limitele fundamentale.

Pasul 1. Ce sunt parametrii?

a, b, c, d sunt numere reale fixate. Literele nu tind la zero; doar x tinde.

Pasul 2. De ce apare $\frac{0}{0}$?

Cosinusul oricărui argument apropiat de 0 este aproape de 1. Prin urmare, ambele diferențe din raport tind la 0.

Pasul 3. Trucul 1−cos

Scriem cos(ax)−cos(bx)=[1−cos(bx)]−[1−cos(ax)] pentru a introduce limita cunoscută a lui 1−cos u.

Pasul 4. Punem în evidență x^2

Pentru k constant, $\frac{1-\cos(kx)}{x^2}=k^2\cdot\frac{1-\cos(kx)}{(kx)^2}\to\frac{k^2}{2}$. Formula include k=0, prin continuitate.

Pasul 5. Trecerea la limită

Sus obținem $\frac{b^2-a^2}{2}$; jos obținem $\frac{d^2-c^2}{2}$. Condiția $|c|\neq|d|$ garantează că numitorul limită nu este zero.

Pasul 6. Forma finală

Putem schimba simultan semnele numărătorului și numitorului: $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$.

Verificare și idee de reținut

Pentru a=b, numărătorul este zero și rezultatul formulei este 0, sub condițiile enunțului.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.19 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.19 — Limita unei puteri de tip 1 la infinit

Enunț

lim(x→3) (7−2x)^(tg($\frac{\pi x}{6}$))

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 114.

A. Soluția pe scurt

1. Scriem 7−2x=1−2(x−3).

2. ln L =lim tg($\frac{\pi x}{6}$)·ln[1−2(x−3)].

3. ln(1+u)/u→1 și tg($\frac{\pi}{2}$+t)≈$-\frac{1}{t}$.

4. Produsul tinde la $\frac{12}{\pi}$; L=e^($\frac{12}{\pi}$).

REZULTAT e^(12/π)

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

tg = tangentă; ctg = cotangentă; ln = logaritm natural; π≈3,14159.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Transformăm puterea în produs cu logaritmul, apoi lucrăm cu t=x−3.

Pasul 1. De ce avem un caz special?

La x=3, baza este 1 și exponentul tg($\frac{\pi}{2}$), nedefinit. Expresia este o formă 1^∞, care poate avea o limită pozitivă diferită de 1.

Pasul 2. Alegerea metodei

Pentru baze pozitive, ln(A^B)=B ln A. În apropierea lui 3, 7−2x este pozitiv, deci putem lua logaritmul.

Pasul 3. Centrarea la punctul 3

Notăm t=x−3. Atunci baza devine 1−2t, iar unghiul $\frac{\pi x}{6}$ devine $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{6}$.

Pasul 4. Limita logaritmului

ln(1−2t)/(−2t)→1 când t→0, deci ln(1−2t)∼−2t.

Pasul 5. Limita tangentei

tg($\frac{\pi}{2}$+u)=−ctg u, iar ctg u∼$\frac{1}{u}$. Cu u=$\frac{\pi t}{6}$ rezultă tg($\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{6}$)∼−$\frac{6}{\pi t}$.

Pasul 6. Calculăm exponentul limitei

(−2t)·(−$\frac{6}{\pi t}$)=$\frac{12}{\pi}$. Așadar ln L=$\frac{12}{\pi}$, deci L=e^($\frac{12}{\pi}$).

Verificare și idee de reținut

Rezultatul este mai mare decât 1, coerent cu produsul pozitiv din limita logaritmilor.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.20 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.20 — Raționalizarea într-o limită exponențială

Enunț

lim(x→0) [1+(a−√(a²−x²))/x]^($\frac{a}{x}$), a>0

Referință în scanare: Enunț: p. 93; soluție: p. 115.

A. Soluția pe scurt

1. a−√(a²−x²)=$\frac{x^2}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}$.
2. Baza=1+$\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}$.
3. Notăm u(x)=$\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}$→0.
4. ($\frac{a}{x}$)u(x)→$\frac{a}{2a}$=$\frac{1}{2}$.
5. Limita =e^($\frac{1}{2}$)=√e.

REZULTAT √e

B. Soluția extinsă — învățăm să gândim metoda

Dicționarul simbolurilor

a>0 = a pozitiv; √e = rădăcina pătrată a lui e; exponent $\frac{a}{x}$ poate fi pozitiv sau negativ.

Ce urmărim și de ce alegem metoda

Raționalizăm diferența de radicali, apoi aplicăm limita exponențială fundamentală.

Pasul 1. De ce ne încurcă radicalul?

La x=0, diferența a−√a² este 0 (pentru a>0). Raportul din bază pare $\frac{0}{0}$.

Pasul 2. Aplicăm conjugata

Înmulțim diferența cu a+√(a²−x²) și folosim (A−B)(A+B)=A²−B². Rezultă $\frac{x^2}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

Pasul 3. Simplificăm

Împărțind la x, expresia devine $\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Factorul x apare explicit și tinde la 0.

Pasul 4. Identificăm 1^∞

Baza tinde la 1, iar $\frac{a}{x}$ are modul mare. Folosim regula: dacă u→0 și v u→L, atunci (1+u)^v→e^L, cu baza pozitivă.

Pasul 5. Calculăm L

v u=$(\frac{a}{x})\cdot\frac{x}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{a}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}\to\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$.

Pasul 6. Concluzia

Limita este e^($\frac{1}{2}$), adică √e. Ipoteza a>0 asigură simplificarea corectă și vecinătatea reală a expresiei.

Verificare și idee de reținut

Observăm că rezultatul nu depinde de parametrul pozitiv a.

Stare: soluție redactată; de verificat independent înainte de publicarea comercială.

FIȘA 2.21 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.21 — Radical cubic cu parametru

Enunț

$\lim(x\to+\infty)\ [\sqrt[3]{(x^3-2x^2+7)}-ax+3]$, $a\in R$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Identificăm termenul care crește cel mai repede. Dacă acesta se anulează la a=1, calculăm și termenul constant, care decide limita.

Pasul 1. Pentru x pozitiv mare scoatem x din radicalul cubic: $\sqrt[3]{(x^3-2x^2+7)}=x\sqrt[3]{(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3})}$.

Concluzie: $\sqrt[3]{(x^3-2x^2+7)}=x\sqrt[3]{(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3})}=x-\frac{2}{3}+o(1)$. Expresia este $(1-a)x+\frac{7}{3}+o(1)$. Rezultat: $+\infty$ dacă $a<1$, $\frac{7}{3}$ dacă $a=1$, $-\infty$ dacă $a>1$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt[3]{}$ este rădăcina cubică, iar a este un parametru fix; o(1) desemnează o cantitate care se apropie de zero.

Ce urmărim? Care este planul?

Identificăm termenul care crește cel mai repede. Dacă acesta se anulează la a=1, calculăm și termenul constant, care decide limita.

Pasul 1. Pentru x pozitiv mare scoatem x din radicalul cubic: $\sqrt[3]{(x^3-2x^2+7)}=x\sqrt[3]{(1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3})}$.

Pasul 2. În vecinătatea lui 1 avem $\sqrt[3]{(1+u)}=1+\frac{u}{3}+o(u)$. Aici $u=-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}$, deci radicalul este $x-\frac{2}{3}+o(1)$.

Pasul 3. Scădem ax și adunăm 3: $(1-a)x+(3-\frac{2}{3})+o(1)=(1-a)x+\frac{7}{3}+o(1)$.

Pasul 4. Dacă $1-a>0$, termenul liniar duce la $+\infty$; dacă $1-a<0$, duce la $-\infty$; dacă a=1, rămâne constanta $\frac{7}{3}$.

Verificare și atenționare

Compară cu soluția tipărită de la pagina 115; analiza pe cazuri este indispensabilă.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.22 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.22 — Raționalizare și diferențe de radicali

Enunț

$\lim(x\to p)\ \dfrac{\sqrt{(2p^3x-x^4)}-p\sqrt[3]{(p^2x)}}{p-\sqrt[4]{(px^3)}}$, $p\in R$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Verificăm dacă putem calcula direct. Obținând $\frac{0}{0}$, transformăm radicalii și comparăm variațiile de ordin întâi în jurul lui p.

Pasul 1. Pentru $p>0$, la $x=p$, numărătorul devine $p^2-p^2=0$, iar numitorul $p-p=0$. Nu împărțim la zero.

Concluzie: Dacă $p>0$: limita $\frac{16p}{9}$, obținută din variațiile de ordin întâi ($\frac{0}{0}$). Dacă $p<0$: limita este 0, prin substituție directă. Dacă $p=0$, funcția nu are domeniu real într-o vecinătate punctată.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt{}$ este radicalul pătrat; $\sqrt[3]{}$ radicalul cubic; $\sqrt[4]{}$ radical de ordin patru; p este un parametru.

Ce urmărim? Care este planul?

Verificăm dacă putem calcula direct. Obținând $\frac{0}{0}$, transformăm radicalii și comparăm variațiile de ordin întâi în jurul lui p.

Pasul 1. Pentru $p>0$, la $x=p$, numărătorul devine $p^2-p^2=0$, iar numitorul $p-p=0$. Nu împărțim la zero.

Pasul 2. Notăm $N(x)=\sqrt{(2p^3x-x^4)}-p\sqrt[3]{(p^2x)}$. Variația locală $N(x)$ este apropiată de $N'(p)(x-p)$.

Pasul 3. Derivăm: primul radical are panta $(2p^3-4x^3)/(2\sqrt{(2p^3x-x^4)})$, adică $-p$ la $x=p$; termenul $p\sqrt[3]{(p^2x)}$ are panta $\frac{p}{3}$ la $x=p$. Deci $N'(p)=-\frac{4p}{3}$.

Pasul 4. Pentru $D(x)=p-\sqrt[4]{(px^3)}$, derivata în p este $-\frac{3}{4}$. Împărțind variațiile, $\left(\frac{N}{D}\right)'(p)=\frac{16p}{9}$.

Pasul 5. Pentru $p<0$, numărătorul tinde la 0, iar numitorul tinde la $p-|p|=2p$, nenul; limita este 0. Pentru $p=0$, primul radical este $\sqrt{(-x^4)}$, nedefinit pe numere reale pentru $x\neq 0$. Formula prin derivate este valabilă numai în cazul $p>0$.

Verificare și atenționare

Cazurile parametrului trebuie tratate separat: $p>0$, $p<0$ și $p=0$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.23 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.23 — Limite fundamentale și forma $\frac{0}{0}$

Enunț

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+e^{x}-\cos x}{(1-\sin x)^{2}-e^{(x^{2})}}$$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Căutăm termenii de ordin întâi. În expresii de tip $\frac{0}{0}$, primii termeni nenuli decid raportul.

Pasul 1. La x=0, atât numărătorul, cât și numitorul sunt zero. Trebuie să comparăm cât de repede se anulează.

Concluzie: Numărătorul =2x+o(x); numitorul =−2x+o(x), deci limita este -1.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

ln este logaritmul natural, e^{x} funcția exponențială, sin și cos sunt funcții trigonometrice.

Ce urmărim? Care este planul?

Căutăm termenii de ordin întâi. În expresii de tip $\frac{0}{0}$, primii termeni nenuli decid raportul.

Pasul 1. La x=0, atât numărătorul, cât și numitorul sunt zero. Trebuie să comparăm cât de repede se anulează.

Pasul 2. Folosim: ln(1+x)=x+o(x), e^{x}=1+x+o(x), cos x=1+o(x). Numărătorul devine 2x+o(x).

Pasul 3. Deoarece sin x=x+o(x), $(1-\sin x)^{2}$=1−2x+o(x); iar e^(x^{2})=1+o(x). Numitorul devine −2x+o(x).

Pasul 4. Împărțim sus și jos la x (x diferit de zero) și trecem la limită: $\frac{2}{-2}$=−1.

Verificare și atenționare

Soluția tipărită folosește aceleași limite fundamentale, fără notația o(x).

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.24 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.24 — Diferențe de arctangentă și tangentă

Enunț

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg(a+x)-arctg(a-x)}{tg(a+x)-tg(a-x)}$$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Numărătorul și numitorul compară variațiile funcțiilor când argumentul se deplasează cu ±x.

Pasul 1. Pentru x mic, arctg(a+x)−arctg(a−x) se comportă ca $\frac{2x}{1+a^2}$.

Concluzie: Limita este $\cos^2(a)/(1+a^2)$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

arctg înseamnă funcția inversă a tangentei; tg este tangenta; a este un parametru real.

Ce urmărim? Care este planul?

Numărătorul și numitorul compară variațiile funcțiilor când argumentul se deplasează cu ±x.

Pasul 1. Pentru x mic, arctg(a+x)−arctg(a−x) se comportă ca $\frac{2x}{1+a^2}$.

Pasul 2. Dacă $\cos a \neq 0$, tg(a+x)−tg(a−x) se comportă ca $\frac{2x}{\cos^2 a}$.

Pasul 3. Simplificăm factorul comun 2x: obținem $\frac{\cos^2 a}{1+a^2}$.

Pasul 4. Când cos a=0, tangenta are o discontinuitate în a, iar diferența din numitor devine nemărginită în modul; numărătorul tinde la 0. Limita este tot 0, în acord cu formula.

Verificare și atenționare

Nu aplicăm mecanic formula derivatei tangentei în punctele unde tangenta nu este definită.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.25 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.25 — O putere cu bază negativă și un raport de logaritmi

Enunț

a) lim(x→$\frac{\pi}{3}$) (sin6x+cos3x)^(ctg6x); b) lim(x→0) ln(cos ax)/ln(cos bx)

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Înaintea calculelor stabilim domeniul real al expresiilor. O limită formală nu poate fi inventată când funcția nu este definită într-o vecinătate potrivită.

Pasul 1. Pentru a), la x=$\frac{\pi}{3}$ baza sin(2π)+cosπ=-1, deci rămâne negativă pentru x suficient de apropiat de $\frac{\pi}{3}$.

Concluziе: a) Nu există limită reală bilaterală: baza tinde la -1, iar exponentul real nu produce o putere reală pentru valori generale. b) $\frac{a^2}{b^2}$ pentru b≠0.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

ctg este cotangenta; ln este logaritmul natural; parametrii a,b sunt constanți.

Ce urmărim? Care este planul?

Înaintea calculelor stabilim domeniul real al expresiilor. O limită formală nu poate fi inventată când funcția nu este definită într-o vecinătate potrivită.

Pasul 1. Pentru a), la x=$\frac{\pi}{3}$ baza sin(2π)+cosπ=-1, deci rămâne negativă pentru x suficient de apropiat de $\frac{\pi}{3}$.

Pasul 2. Un număr negativ ridicat la un exponent real arbitrar nu este, în general, număr real. Cotangenta ia valori neîntregi; prin urmare expresia nu definește o funcție reală în întreaga vecinătate punctată. Nu există limita reală cerută.

Pasul 3. Pentru b), când t→0, ln(cos t) se comportă ca $-\frac{t^2}{2}$. Rezultă ln(cos ax)≈$-\frac{a^2x^2}{2}$ și ln(cos bx)≈$-\frac{b^2x^2}{2}$.

Pasul 4. Împărțind obținem $\frac{a^2}{b^2}$. Dacă b=0, numitorul ln(cos 0)=0 pentru orice x și expresia nu este definită.

Verificare și atenționare

Observația despre domeniu la 2.25(a) este importantă pedagogic și nu poate fi trecută sub tăcere.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.26 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.26 — Limită de tip 1 la infinit

Enunț

lim(x→$\frac{\pi}{6}$) [sin x(1+2sin x)]^(sec3x)

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Baza tinde la 1 și exponentul devine nemărginit. Studiem logaritmul expresiei, care transformă puterea într-un produs.

Pasul 1. În x=$\frac{\pi}{6}$, sin x=$\frac{1}{2}$, deci baza este 1. În același punct cos 3x=cos($\frac{\pi}{2}$)=0, deci exponentul are modul mare.

Concluzie: Prin logaritmare, limita este e^(−$\frac{\sqrt{3}}{2}$).

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

sec u=1/cos u; sin și cos sunt funcții trigonometrice; e este baza logaritmilor naturali.

Ce urmărim? Care este planul?

Baza tinde la 1 și exponentul devine nemărginit. Studiem logaritmul expresiei, care transformă puterea într-un produs.

Pasul 1. În x=$\frac{\pi}{6}$, sin x=$\frac{1}{2}$, deci baza este 1. În același punct cos 3x=cos($\frac{\pi}{2}$)=0, deci exponentul are modul mare.

Pasul 2. Notăm t=x−$\frac{\pi}{6}$. Derivata bazei B(x)=sin x+2sin²x în punctul $\frac{\pi}{6}$ este cos($\frac{\pi}{6}$)(1+4sin($\frac{\pi}{6}$))= $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Pasul 3. Prin urmare ln B(x)≈($\frac{3\sqrt{3}}{2}$)t, deoarece ln(1+u)≈u pentru u apropiat de zero.

Pasul 4. cos(3x)=cos($\frac{\pi}{2}$+3t)=−sin3t≈−3t. Produsul $\frac{\ln B(x)}{\cos 3x}$ tinde la −$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pasul 5. Revenim de la logaritm la putere: rezultatul este e^(−$\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Verificare și atenționare

Controlul semnului în exponent este obligatoriu; nu se citește rezultatul dintr-o scanare neclară.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.27 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.27 — Formă 1 la infinit cu radical trigonomeric

Enunț

$\lim(x\to\frac{\pi}{4})\ [2-\text{tg } x\cdot\sqrt{(\text{ctg } x)}]^{[\frac{1}{\sin x-\cos x}]}$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Simplificăm baza înainte de logaritmare și comparăm variația ei cu cea a expresiei sin x−cos x.

Pasul 1. În jurul lui $\frac{\pi}{4}$, tg x>0. Atunci tg $x\cdot\sqrt{(\text{ctg } x)}=\sqrt{(\text{tg } x)}$. Baza este $2-\sqrt{(\text{tg } x)}$ și tinde la 1.

Concluzie: Deoarece tg $x\sqrt{(\text{ctg } x)}=\sqrt{(\text{tg } x)}$, rezultatul este $e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}})}$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

tg este tangenta, ctg cotangenta, iar √ indică radicalul pătrat.

Ce urmărim? Care este planul?

Simplificăm baza înainte de logaritmare și comparăm variația ei cu cea a expresiei sin x−cos x.

Pasul 1. În jurul lui $\frac{\pi}{4}$, tg x>0. Atunci tg $x\cdot\sqrt{(\text{ctg } x)}=\sqrt{(\text{tg } x)}$. Baza este $2-\sqrt{(\text{tg } x)}$ și tinde la 1.

Pasul 2. Notăm $t=x-\frac{\pi}{4}$. Panta funcției √(tg x) în acest punct este 1, deci baza este 1−t+o(t).

Pasul 3. $\sin(\frac{\pi}{4}+t)-\cos(\frac{\pi}{4}+t)=\sqrt{2}\sin t=\sqrt{2}\,t+o(t)$.

Pasul 4. Logaritmul expresiei este $\ln(1-t+o(t))/(\sqrt{2}\,t+o(t))\to-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pasul 5. Limita inițială este $e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}})}$.

Verificare și atenționare

Poate fi demonstrată și fără derivate, folosind identitățile pentru diferențe de radicali.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.28 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.28 — Diferența a doi radicali de ordine diferite

Enunț

$\lim(x\to+\infty)\ [\sqrt[m]{(x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m)}-\sqrt[n]{(x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n)}]$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Fiecare radical se comportă aproximativ ca x. Termenii x se anulează la scădere, așa că trebuie să identificăm corecția constantă.

Pasul 1. Din primul radical scoatem x: $x\cdot(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots)^{\wedge}(\frac{1}{m})$.

Concluzie: Limita este $\frac{a_1}{m}-\frac{b_1}{n}$, pentru $m,n\geq 2$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt[m]{}$ este radicalul de ordin m; indicii de jos a_1,b_1 desemnează coeficienții.

Ce urmărim? Care este planul?

Fiecare radical se comportă aproximativ ca x. Termenii x se anulează la scădere, așa că trebuie să identificăm corecția constantă.

Pasul 1. Din primul radical scoatem x: $x\cdot(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots)^{\wedge}(\frac{1}{m})$.

Pasul 2. Folosim pentru u mic aproximația $(1+u)^{\wedge}(\frac{1}{m})=1+\frac{u}{m}+o(u)$. Primul radical devine $x+\frac{a_1}{m}+o(1)$.

Pasul 3. Similar, al doilea radical este $x+\frac{b_1}{n}+o(1)$.

Pasul 4. Scădem: termenii x se reduc; rămâne $\frac{a_1}{m}-\frac{b_1}{n}+o(1)$, deci limita este $\frac{a_1}{m}-\frac{b_1}{n}$.

Verificare și atenționare

Metoda diferenței de puteri poate justifica aceeași concluzie fără dezvoltări asimptotice.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.29 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.29 — Logaritm și polinoame

Enunț

$\lim(x\to 0)\ \ln(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)/(b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)$, $a_i,b_i>0$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Alegem termenii de gradul cel mai mic, fiindcă ei domină în apropierea lui zero.

Pasul 1. Notăm $u(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Atunci $u(x)\to 0$.

Concluzie: Limita este $\frac{a_1}{b_1}$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

Coeficienții a_1,b_1 sunt pozitivi, iar ln este logaritmul natural.

Ce urmărim? Care este planul?

Alegem termenii de gradul cel mai mic, fiindcă ei domină în apropierea lui zero.

Pasul 1. Notăm $u(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Atunci $u(x)\to 0$.

Pasul 2. Limita fundamentală $\ln(1+u)/u\to 1$ ne permite să separăm logaritmul de polinom.

Pasul 3. Scriem raportul ca $[\ln(1+u)/u]\cdot[\frac{u}{b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}]$.

Pasul 4. În al doilea raport împărțim la x (pentru $x\neq 0$). Rezultă $\frac{a_1+a_2x+\ldots}{b_1+b_2x+\ldots}\to\frac{a_1}{b_1}$.

Pasul 5. Înmulțim limitele 1 și $\frac{a_1}{b_1}$.

Verificare și atenționare

Deși sunt multe puteri, numai primul termen nenul din fiecare polinom decide limita.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.30 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.30 — Putere exponențială cu exponent reciproc

Enunț

$\lim(x\to 0^+)\ (\cos\sqrt{x})^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Baza tinde la 1, exponentul la $+\infty$. Transformăm puterea în produs prin logaritmare.

Pasul 1. Scriem $y=\sqrt{x}$. Atunci $y\to 0^+$ și $x=y^2$.

Concluzie: $\ln L=\lim(x\to 0^+)\ \ln(\cos\sqrt{x})/x=-\frac{1}{2}$, deci $L=e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt{x}$ necesită $x\geq 0$, motiv pentru care apropierea de zero este din dreapta.

Ce urmărim? Care este planul?

Baza tinde la 1, exponentul la $+\infty$. Transformăm puterea în produs prin logaritmare.

Pasul 1. Scriem $y=\sqrt{x}$. Atunci $y\to 0^+$ și $x=y^2$.

Pasul 2. Logaritmul puterii devine $\ln(\cos y)/y^2$.

Pasul 3. Deoarece $\ln(\cos y)\approx-\frac{y^2}{2}$ pentru y mic, raportul tinde la $-\frac{1}{2}$.

Pasul 4. Prin exponențiere obținem $L=e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Verificare și atenționare

Precizăm domeniul real al lui $\sqrt{x}$; nu există apropiere prin $x<0$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.31 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.31 — Două identități trigonometrice

Enunț

1) $\lim(x\to a)\ [\sin^n x-\sin^n a]/\sin(x-a)$; 2) $\lim(x\to\frac{\pi}{4})\ \frac{tg\,x-1}{\sin^4 x-\cos^4 x}$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: În prima limită factorizăm diferența de puteri; în a doua simplificăm diferența pătratelor.

Pasul 1. Pentru $A=\sin x$ și $B=\sin a$, $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+\ldots+B^{n-1})$.

Concluzie: 1) $n\cdot\sin^{n-1}(a)\cdot\cos a$. 2) 1.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

n este un număr natural fix; $\sin^n x$ înseamnă (sin x) ridicat la puterea n.

Ce urmărim? Care este planul?

În prima limită factorizăm diferența de puteri; în a doua simplificăm diferența pătratelor.

Pasul 1. Pentru $A=\sin x$ și $B=\sin a$, $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+\ldots+B^{n-1})$.

Pasul 2. Când $x\to a$, suma din paranteză tinde la $n\cdot\sin^{n-1}a$. Raportul $(\sin x-\sin a)/\sin(x-a)$ tinde la $\cos a$. Produsul dă primul rezultat.

Pasul 3. Pentru a doua limită, $tg\,x-1=(\sin x-\cos x)/\cos x$.

Pasul 4. $\sin^4x-\cos^4x=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)(\sin^2x+\cos^2x)$. Ultimul factor este 1.

Pasul 5. Simplificăm $\sin x-\cos x$ pentru $x\neq\frac{\pi}{4}$ și trecem la limită: $\frac{1}{\cos(\pi/4)\cdot(\sin(\pi/4)+\cos(\pi/4))}$ $=1$.

Verificare și atenționare

Identitatea $\sin^2x+\cos^2x=1$ este folosită explicit.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.32 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.32 — Două limite laterale diferite

Enunț

$\lim(x\to\frac{\pi}{2})\ \frac{x-\pi/2}{\sqrt{}}(1-\sin x)$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Transformăm expresia cu variabila $t=x-\frac{\pi}{2}$ și urmărim semnul lui t.

Pasul 1. Punem $t=x-\frac{\pi}{2}$. Atunci $\sin x=\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$.

Concluzie: Limita din dreapta este $+\sqrt{2}$, iar cea din stânga este $-\sqrt{2}$. Limita bilaterală nu există.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

Radicalul pătrat este totdeauna nenegativ; $|t|$ este valoarea absolută a lui t.

Ce urmărim? Care este planul?

Transformăm expresia cu variabila $t=x-\frac{\pi}{2}$ și urmărim semnul lui t.

Pasul 1. Punem $t=x-\frac{\pi}{2}$. Atunci $\sin x=\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$.

Pasul 2. Identitatea $1-\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$ dă $\sqrt{(1-\sin x)}=\sqrt{2}\cdot|\sin(\frac{t}{2})|$.

Pasul 3. Expresia este $\frac{t}{\sqrt{2}\cdot\vee\sin(t/2)\vee¿¿}$. Deoarece $|\sin(\frac{t}{2})|\approx|t|/2$, raportul se comportă ca $\sqrt{2}\cdot t/|t|$.

Pasul 4. Dacă $t>0$, $t/|t|=1$ și limita este $+\sqrt{2}$. Dacă $t<0$, $t/|t|=-1$ și limita este $-\sqrt{2}$.

Pasul 5. Cele două limite laterale nu coincid; limita bilaterală nu există.

Verificare și atenționare

Pierderea valorii absolute este o greșeală frecventă și schimbă răspunsul.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.33 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.33 — Diferența a două cosinusuri

Enunț

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \cdot \sin x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x \cdot \sin 5x}$

Referință în scanare: enunț pp. 94–95; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Diferența cosinusurilor se transformă într-un produs de sinusuri; apoi fiecare sinus este comparat cu argumentul său.

Pasul 1. Pentru a), $\cos x - \cos 5x = 2\sin 3x \cdot \sin 2x$. Numărătorul se comportă ca $2 \cdot 3x \cdot 2x = 12x^2$.

Concluzie: a) 12. b) 4.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

Identitatea $\cos A - \cos B = -2 \sin(\frac{A+B}{2}) \sin(\frac{A-B}{2})$.

Ce urmărim? Care este planul?

Diferența cosinusurilor se transformă într-un produs de sinusuri; apoi fiecare sinus este comparat cu argumentul său.

Pasul 1. Pentru a), $\cos x - \cos 5x = 2\sin 3x \cdot \sin 2x$. Numărătorul se comportă ca $2 \cdot 3x \cdot 2x = 12x^2$.

Pasul 2. Numitorul $x \cdot \sin x$ se comportă ca x^2. Limita este 12.

Pasul 3. Pentru b), $\cos 3x - \cos 7x = 2\sin 5x \cdot \sin 2x$.

Pasul 4. Pentru x apropiat de zero și diferit de zero, simplificăm $\sin 5x$. Rămâne $\frac{2\sin 2x}{x} \to 2 \cdot 2 = 4$.

Pasul 5. În ambele cazuri, identitatea $\sin \frac{t}{t} \to 1$ justifică înlocuirea aproximativă a sinusului prin argumentul său.

Verificare și atenționare

Nu confundăm numitorul din subpunctul a), $x \cdot \sin x$, cu cel din subpunctul b), $x \cdot \sin 5x$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.34 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.34 — Anularea termenilor dominanți în fracții trigonometrice

Enunț

lim(x→0) $[\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}]$

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Aducem fracțiile la același numitor și simplificăm; nu evaluăm separat cei doi termeni infiniți.

Pasul 1. Aplicăm $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$ și $\sin^2 x=4\sin^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})$.

Concluzie: Rezultatul este $\frac{1}{2}$.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sin^2 x=(\sin x)^2$; folosim formula $\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})=1$.

Ce urmărim? Care este planul?

Aducem fracțiile la același numitor și simplificăm; nu evaluăm separat cei doi termeni infiniți.

Pasul 1. Aplicăm $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$ și $\sin^2 x=4\sin^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})$.

Pasul 2. Prima fracție este $\frac{1}{2\sin^2(x/2)\cos^2(x/2)}$, iar a doua $\frac{1}{2\sin^2(x/2)}$.

Pasul 3. Diferența are numărătorul $1-\cos^2(\frac{x}{2})=\sin^2(\frac{x}{2})$. Se simplifică și rămâne $\frac{1}{2\cos^2(x/2)}$.

Pasul 4. Pentru $x\to 0$, $\cos^2(\frac{x}{2})\to 1$; rezultatul este $\frac{1}{2}$.

Verificare și atenționare

Atenție: nu se scade infinit minus infinit; transformarea algebrică precedă trecerea la limită.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.35 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.35 — Limite laterale la π

Enunț

$\lim(x\to\pi)\ \mathrm{tg}(\frac{x}{2})/\sqrt{[1+(\frac{x}{\pi-x})^2]}$

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Notăm $t=x-\pi$ și păstrăm valoarea absolută provenită din radical.

Pasul 1. Cu $t=x-\pi$, $\mathrm{tg}(\frac{x}{2})=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})=-\mathrm{ctg}(\frac{t}{2})$, care este aproximativ $-\frac{2}{t}$.

Concluzie: Limita din stânga este $+\frac{2}{\pi}$; din dreapta $-\frac{2}{\pi}$. Limita bilaterală nu există.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

π este numărul aproximativ 3,14159, iar $|t|$ înseamnă modulul numărului t.

Ce urmărim? Care este planul?

Notăm $t=x-\pi$ și păstrăm valoarea absolută provenită din radical.

Pasul 1. Cu $t=x-\pi$, $\mathrm{tg}(\frac{x}{2})=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})=-\mathrm{ctg}(\frac{t}{2})$, care este aproximativ $-\frac{2}{t}$.

Pasul 2. Numitorul este $\sqrt{[1+(\frac{\pi+t}{-t})^2]}=\sqrt{[t^2+(\pi+t)^2]}/|t|$. Pentru $t\to0$, acesta este aproximativ $\pi/|t|$.

Pasul 3. Raportul este aproximativ $-(\frac{2}{\pi})\cdot|t|/t$. Pentru $t<0$ obținem $+\frac{2}{\pi}$; pentru $t>0$ obținem $-\frac{2}{\pi}$.

Pasul 4. Limitele laterale sunt diferite, deci limita bilaterală nu există.

Verificare și atenționare

Greșeala caracteristică este înlocuirea lui $\sqrt{(t^2)}$ prin t, în loc de $|t|$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.36 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.36 — Rationalizarea unui radical compus

Enunț

$\lim(x\to 0) \dfrac{\sqrt{(1+x\sin x)}-\cos 2x}{tg^2(\frac{x}{2})}$

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Rationalizăm diferența radicalului cu cosinusul, obținând o expresie fără diferență 0−0.

Pasul 1. Înmulțim cu expresia conjugată √(1+x sinx)+cos2x.

Concluzie: Rezultatul este 10.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

tg este tangenta, iar $tg^2(\frac{x}{2})$ este pătratul tangentei.

Ce urmărim? Care este planul?

Rationalizăm diferența radicalului cu cosinusul, obținând o expresie fără diferență 0−0.

Pasul 1. Înmulțim cu expresia conjugată √(1+x sinx)+cos2x.

Pasul 2. Numărătorul devine $(1+x\sin x)-\cos^2 2x = x\sin x+\sin^2 2x$.

Pasul 3. Pentru x mic, $x\sin x\approx x^2$, $\sin^2 2x\approx 4x^2$, iar $tg^2(\frac{x}{2})\approx\frac{x^2}{4}$. Suma la numărător$\approx 5x^2$.

Pasul 4. Conjugata tinde la 2. Numitorul total este aproximativ $(\frac{x^2}{4})\cdot 2=\frac{x^2}{2}$. Raportul este $\frac{5}{1/2}=10$.

Verificare și atenționare

Fiecare aproximare poate fi justificată prin $\sin\frac{u}{u}\to 1$ și $tg\frac{u}{u}\to 1$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.37 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.37 — O putere care tinde la 1

Enunț

lim(x→$\frac{\pi}{2}$) (sinx)^(tgx)

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Baza se apropie de 1, exponentul poate avea modul mare; calculăm produsul exponent × logaritm.

Pasul 1. Notăm t=x−$\frac{\pi}{2}$. Atunci sinx=cos t și tgx=−ctg t.

Concluzie: Rezultatul este 1.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

Puterea cu bază pozitivă se poate studia prin logaritmare.

Ce urmărim? Care este planul?

Baza se apropie de 1, exponentul poate avea modul mare; calculăm produsul exponent × logaritm.

Pasul 1. Notăm t=x−$\frac{\pi}{2}$. Atunci sinx=cos t și tgx=−ctg t.

Pasul 2. Pentru t mic, ln cos t≈−$\frac{t^2}{2}$ și ctg t≈$\frac{1}{t}$.

Pasul 3. Produsul tgx·ln sinx≈(−$\frac{1}{t}$)(−$\frac{t^2}{2}$)=$\frac{t}{2}$→0.

Pasul 4. Limita puterii este e^0=1.

Verificare și atenționare

Nu este corect să proclamăm automat 1^∞=1; aici rezultatul este demonstrat.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.38 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.38 — Cosinus ridicat la cotangentă la pătrat

Enunț

lim(x→0) (cosx)^(ctg²x)

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Logaritmăm forma de tip 1^∞.

Pasul 1. ln L=lim ctg²x·ln cosx.

Concluzie: Rezultatul este e^($-\frac{1}{2}$).

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

ctg x=cosx/sinx; ctg²x este pătratul cotangentei.

Ce urmărim? Care este planul?

Logaritmăm forma de tip 1^∞.

Pasul 1. ln L=lim ctg²x·ln cosx.

Pasul 2. ln cosx≈$-\frac{x^2}{2}$, pentru x aproape de 0.

Pasul 3. ctg²x≈$\frac{1}{x^2}$. Produsul tinde la $-\frac{1}{2}$.

Pasul 4. L=e^($-\frac{1}{2}$)=$\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Verificare și atenționare

Exponentul ctg²x este întotdeauna nenegativ pentru valorile pentru care este definit.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.39 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.39 — Un alt exemplu de forma 1 la infinit

Enunț

lim(x→0) (1−sinx)^(ctgx)

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Identificăm variația de ordinul x a bazei.

Pasul 1. Scriem ln L=lim ctg x·ln(1−sin x).

Concluzie: Rezultatul este e^(−1).

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

În apropierea lui 0, baza este pozitivă, deci putem folosi logaritmul.

Ce urmărim? Care este planul?

Identificăm variația de ordinul x a bazei.

Pasul 1. Scriem ln L=lim ctg x·ln(1−sin x).

Pasul 2. Folosim ln(1+u)≈u pentru u→0. Avem ln(1−sin x)≈−sinx.

Pasul 3. ctg x·(−sin x)=−cos x→−1.

Pasul 4. L=e^(−1)=$\frac{1}{e}$.

Verificare și atenționare

Această problemă se rezolvă prin simplificarea funcțiilor trigonometrice, nu prin ghicirea exponentului.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.40 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.40 — Exponent cu cosecantă

Enunț

lim(x→$\frac{\pi}{3}$) [cos x(1+2cosx)]^(cosec3x)

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Baza este 1 în punctul-limită, iar sin 3x tinde la zero; calculăm logaritmul puterii.

Pasul 1. Notăm t=x−$\frac{\pi}{3}$. În punctul x=$\frac{\pi}{3}$ baza B(x)=cosx+2cos²x este 1.

Concluzie: Rezultatul este e^($\frac{\sqrt{3}}{2}$).

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

cosec u=1/sin u.

Ce urmărim? Care este planul?

Baza este 1 în punctul-limită, iar sin 3x tinde la zero; calculăm logaritmul puterii.

Pasul 1. Notăm t=x−$\frac{\pi}{3}$. În punctul x=$\frac{\pi}{3}$ baza B(x)=cosx+2cos²x este 1.

Pasul 2. Variația bazei este B(x)−1≈−($\frac{3\sqrt{3}}{2}$)t, deoarece B′($\frac{\pi}{3}$)=−sin($\frac{\pi}{3}$)(1+4cos($\frac{\pi}{3}$))=−$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Pasul 3. sin(3x)=sin(π+3t)=−sin3t≈−3t.

Pasul 4. ln B(x)/sin3x≈$\frac{-(3\sqrt{3}/2)t}{-3t}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pasul 5. Limita inițială este e^($\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Verificare și atenționare

Semnele negative se simplifică; aceasta este sursa semnului pozitiv din exponent.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.41 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.41 — Rădăcina cubică și diferența de cuburi

Enunț

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{(1+sinx)}-1}$$

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Raționalizăm radicalul cubic folosind suma de pătrate mixte.

Pasul 1. Notăm $y=\sqrt[3]{(1+sinx)}$. Deoarece $y^3-1=sinx$, avem $(y-1)(y^2+y+1)=sinx$.

Concluzie: Rezultatul este 3.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

$\sqrt[3]{}$ este radicalul cubic, iar $\sqrt[3]{1}=1$.

Ce urmărim? Care este planul?

Raționalizăm radicalul cubic folosind suma de pătrate mixte.

Pasul 1. Notăm $y=\sqrt[3]{(1+sinx)}$. Deoarece $y^3-1=sinx$, avem $(y-1)(y^2+y+1)=sinx$.

Pasul 2. Pentru $x\neq 0$ suficient de mic, $\frac{1}{y-1}=(y^2+y+1)/sinx$.

Pasul 3. Raportul inițial devine $x(x+1)(y^2+y+1)/sinx$.

Pasul 4. $x/sinx\to 1$, $x+1\to 1$ și $y^2+y+1\to 3$; rezultatul este 3.

Verificare și atenționare

Verificăm domeniul: radicalul cubic admite și argumente negative, spre deosebire de radicalul pătrat.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

FIȘA 2.42 / PAGINĂ DE MANUAL

Exercițiul 2.42 — Arcsinus și diferență de puteri

Enunț

$\lim(x\to a)\ \arcsin(x-a)/(x^n-a^n)$, $n\geq 1$

Referință în scanare: enunț pp. 96–97; soluție în secțiunea tipărită de rezolvări.

A. Soluția pe scurt

Metodă: Descompunem raportul într-o limită fundamentală și o diferență de puteri.

Pasul 1. Punem $t=x-a$. Atunci $\arcsin \frac{t}{t}\to 1$.

Concluzie: Pentru $a\neq 0$: limita este $\frac{1}{n\,a^{n-1}}$. Pentru $a=0$ și $n=1$: 1; pentru $a=0$ și n impar ≥ 3: $+\infty$; pentru $a=0$ și n par: limita bilaterală nu există.

B. Soluția extinsă — de la simboluri la metodă

Dicționarul simbolurilor

arcsin este funcția inversă a sinusului; n este un număr natural fix.

Ce urmărim? Care este planul?

Descompunem raportul într-o limită fundamentală și o diferență de puteri.

Pasul 1. Punem $t=x-a$. Atunci $\arcsin \frac{t}{t}\to 1$.

Pasul 2. Identitatea $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})$ permite simplificarea factorului $x-a$.

Pasul 3. Dacă $a\neq 0$, paranteza tinde la $n\,a^{n-1}$, număr nenul; limita este $\frac{1}{n\,a^{n-1}}$.

Pasul 4. Dacă $a=0$, avem $\arcsin \frac{x}{x}^n\approx x\hat{}(1-n)$. Pentru $n=1$ rezultatul este 1. Pentru n impar≥ 3, exponentul $1-n$ este negativ par, deci limita $+\infty$. Pentru n par, semnele laterale sunt opuse și limita bilaterală nu există.

Verificare și atenționare

Cartea poate prezenta doar cazul uzual $a\neq 0$; pentru un manual introductiv trebuie explicată și excepția $a=0$.

STATUT: redactat, necesită revizie matematică independentă înainte de publicare.

Situația reală a volumului — ediție de lucru

Exercițiile 2.1–2.42 au două variante de soluție redactată. Exercițiile 2.43–2.91 nu au încă rezolvări extinse complete și nu sunt prezentate ca finalizate. Înaintea publicării este necesară verificarea matematică independentă, a domeniilor și a formulelor din scanare. Nu folosiți această ediție ca volum comercial final.

OBSERVAȚIE DE FORMAT: Au fost transformate în fracții tipografice etajate expresiile simple de tip $\frac{a}{b}$. Unele expresii complexe din enunțurile mai noi rămân în notație liniară și necesită culegere completă cu editor de ecuații. Este interzisă publicarea lor ca ediție definitivă până la remedierea acestei limitări.