MATEMATICĂ PENTRU LICEENI
LIMITE DE ȘIRURI

100 de probleme explicate pas cu pas — exercițiile 1.1–1.100

Versiune de lucru • Etapa 3 • 14 noiembrie 2026

Bază de studiu: culegerea scanată „Matematica — limite de șiruri”, C. Ionescu-Țiu; enunțuri la pp. 16–33 și soluții la pp. 34–83. Textul de față este o redactare pedagogică nouă, în format de lucru, pentru verificare editorială; nu este o transcriere a cărții.

Public țintă: elevi de liceu care cunosc operațiile aritmetice, dar au nevoie de introducerea explicită a radicalilor, puterilor, șirurilor și limitelor.

Cum se folosește: citește enunțul, parcurge „Ce trebuie să știm”, acoperă temporar rezolvarea și încearcă fiecare pas, apoi compară rezultatul. La final rezolvă întrebarea de verificare.

STATUS: 100 de exerciții, numerotate 1.1–1.100, au primit rezolvări și explicații. Este prima versiune completă, supusă ulterior controlului matematic, grafic și editorial. Problemele cu erori în sursă au note critice vizibile.

CONȚINUT

1.1–1.16 — Puteri, fracții algebrice, radicali și exponentiale

1.17–1.24 — Dezvoltări algebrice și sume de puteri

1.25–1.29 — Comparații, creștere exponențială și sume armonice

1.30–1.33 — Raționalizarea diferențelor de radicali

1.34–1.55 — Radicali imbricați, parametri, sume și produse

1.56–1.81 — Medii, teoreme de convergență, serii și sume

1.82–1.100 — Recurențe, periodicitate, trigonometrie și aproximații

MINI-LECȚIE: NOȚIUNILE NECESARE

1. Ce este un șir?

Un șir numeric este o listă ordonată de numere, construită după o regulă. Dacă A_n este expresia care descrie al n-lea termen, atunci A_1, A_2, A_3,... sunt termenii șirului. Indicele n nu este un număr necunoscut de rezolvat, ci o poziție care poate crește oricât.

2. Ce este limita?

Limita descrie tendința șirului pe măsură ce n crește. Limita 3 înseamnă că termenii se apropie oricât de mult de 3. Limita $+\infty$ înseamnă că, după un anumit termen, toate valorile depășesc orice prag ales. Infinitul nu este un număr real obișnuit.

3. Puteri și radicali

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (de n ori). Pentru $a>0$, $a^{(1/2)} = \sqrt{a}$; în general $a^{(1/p)}$ este rădăcina de ordin p. Reguli utile: $a^u \cdot a^v = a^{(u+v)}$, $a^u / a^v = a^{(u-v)}$, $(a^u)^v = a^{(uv)}$.

4. Fracții cu n la numitor

Pentru orice $p>0$, $1/n^p \to 0$. Când un raport de polinoame conține puteri de n, împărțim numărătorul și numitorul la cea mai mare putere relevantă pentru a identifica termenii care rămân.

5. Ce este numărul e?

Numărul $e \approx 2{,}71828$ poate fi definit prin limita $(1+1/n)^n \to e$. Generalizarea $(1+u_n)^{v_n} \to e^c$ se folosește când $u_n \to 0$ și $v_n u_n \to c$, cu baza pozitivă. Dacă produsul merge la $+\infty$, rezultatul poate tinde la $+\infty$, iar dacă merge la $-\infty$, la 0.

6. Forme nedeterminate

Expresiile $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ și 1^∞ sunt semnale de alarmă, nu valori care pot fi simplificate mecanic. Transformarea algebrică, comparația sau o teoremă pot transforma problema într-una rezolvabilă.

7. Conjugata radicalilor

Pentru $A,B \geq 0$, $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (A-B)/(\sqrt{A}+\sqrt{B})$. Identitatea se obține înmulțind și împărțind cu $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ și folosind $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

8. Verificarea unui rezultat

După calcul, întrebăm: rezultatul are semnul potrivit? S-ar putea ca un raport între numere pozitive să dea o limită negativă? Am împărțit la o expresie nenulă? Am analizat toate cazurile unui parametru?

REZOLVĂRI DETALIATE

Fiecare exercițiu are enunțul, noțiunile necesare, pașii justificați, răspunsul și o verificare pedagogică. Nivelul de detaliu poate fi extins prin feedback ulterior.

EXERCIȚIUL 1.1

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 34.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [(\sqrt{2})^n + (\sqrt{3})^n + (\sqrt{5})^n + (\sqrt{7})^n]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina pătrată $\sqrt{2}$ este numărul pozitiv al cărui pătrat este 2. De exemplu, $(\sqrt{2})^2 = 2$.

2. Puterea $(\sqrt{2})^n$ înseamnă produsul a n factori egali cu $\sqrt{2}$. Indicele n parcurge numere naturale din ce în ce mai mari.

3. Să spunem că limita este $+\infty$ înseamnă: oricât de mare ar fi un prag ales, termenii șirului îl depășesc în cele din urmă și rămân deasupra lui.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Calculăm câteva valori pentru a ne orienta: la n=2 suma este 2+3+5+7=17; la n=4, suma este 4+9+25+49=87; la n=6, suma este 8+27+125+343=503.

Pasul 2. Nu confundăm observația numerică cu o dovadă. Toți termenii sunt pozitivi, deci suma este cel puțin $(\sqrt{2})^n$. Ne ajunge să arătăm că acest singur termen poate deveni arbitrar de mare.

Pasul 3. Scriem $\sqrt{2}=1+t$, unde $t=\sqrt{2}-1>0$. Pentru orice n natural, $(1+t)^n \geq 1+nt$. Această inegalitate se obține prin inducție: pentru n=1 este egalitate; dacă este adevărată pentru n, atunci înmulțirea cu $1+t>0$ ne dă $(1+t)^{n+1} \geq (1+nt)(1+t) = 1+(n+1)t+nt^2 \geq 1+(n+1)t$.

Pasul 4. Astfel, $(\sqrt{2})^n \geq 1+n(\sqrt{2}-1)$. Ultima expresie depășește orice număr fix dacă alegem n suficient de mare; așadar și suma inițială depășește orice prag.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Un șir care conține doar termeni pozitivi nu poate avea o sumă mai mică decât oricare termen al său. Verifică numeric pentru n=4 și apoi explică de ce principiul este valabil pentru orice n.

EXERCIȚIUL 1.2

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 34.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \sqrt{(5n^2 - 3n + 2)} / (4n+1)$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Un raport este o împărțire: numărătorul este deasupra barei, numitorul dedesubt.

2. Când n devine mare, n^2 crește mai repede decât n. Împărțind o expresie prin n sau n^2 nu-i schimbăm valoarea dacă efectuăm transformarea corect, atât sus cât și jos.

3. Pentru n pozitiv, $\sqrt{(n^2)}=n$. Această observație permite să scoatem un factor n din radical.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scoatem n^2 în fața parantezei din radical: $5n^2-3n+2=n^2(5-3/n+2/n^2)$. Verificare: $n^2\cdot(3/n)=3n$; $n^2\cdot(2/n^2)=2$.

Pasul 2. Aplicăm $\sqrt{(ab)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ pentru numere nenegative: $\sqrt{[n^2(5-3/n+2/n^2)]}=n\sqrt{(5-3/n+2/n^2)}$, deoarece $n>0$.

Pasul 3. Rescriem numitorul $4n+1=n(4+1/n)$. Raportul devine $[n\sqrt{(5-3/n+2/n^2)}]/[n(4+1/n)]$. Factorii n se simplifică, fiind nenuli.

Pasul 4. Acum $1/n\to0$ și $1/n^2\to0$. Expresia din radical tinde la 5, iar numitorul la 4. Radicalul este o funcție continuă pe numere nenegative, deci rezultă $\sqrt{5}/4$.

Răspuns final

$$L = \sqrt{5}/4$$

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $n=100$, compară $\sqrt{(5\cdot100^2-3\cdot100+2)}/(401)$ cu aproximarea $\sqrt{5}/4\approx0{,}559$. De ce sunt apropiate?

EXERCIȚIUL 1.3

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 34.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{3n^2+5n+4}{n+1}\right]^{\left[\frac{2n+4}{3n}\right]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici avem o putere al cărei număr de la bază și exponent depind ambele de n.

2. Trebuie examinate separat: baza, adică întreaga fracție, și exponentul, adică fracția scrisă sus.

3. O putere cu bază tot mai mare și exponent care rămâne pozitiv, departe de zero, crește fără limită.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Împărțim numărătorul și numitorul bazei la n: $(3n^2+5n+4)/(n+1)=(3n+5+4/n)/(1+1/n)$. Partea 3n devine arbitrar de mare, iar numitorul tinde la 1; baza tinde astfel la $+\infty$.

Pasul 2. Calculăm limita exponentului: $(2n+4)/(3n)=2/3+4/(3n)$, care tinde la 2/3. Acesta este un număr strict pozitiv.

Pasul 3. Pentru n suficient de mare, exponentul este cel puțin 1/2, iar baza este mai mare decât 1. În consecință, puterea este cel puțin rădăcina pătrată a bazei.

Pasul 4. Cum baza crește fără limită, și rădăcina ei pătrată crește fără limită; prin comparație, expresia dată tinde la $+\infty$.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu concluzionăm numai din faptul că „baza tinde la infinit”; dacă exponentul ar tinde la zero, ar fi necesară o analiză suplimentară. Aici exponentul tinde la 2/3.

EXERCIȚIUL 1.4

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 34.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n^2+5n+4}{3n^2+2}\right]^{\left[\frac{-8n}{3n+1}\right]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. O putere cu exponent negativ înseamnă inversarea bazei: $x^{-2}=1/x^2$, pentru $x>0$.

2. Dacă baza se apropie de un număr pozitiv, iar exponentul se apropie de un număr finit, putem calcula puterea din cele două limite.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Împărțim sus și jos în baza puterii la n^2. Obținem $(2+5/n+4/n^2)/(3+2/n^2)$, care tinde la $2/3$.

Pasul 2. Calculăm exponentul împărțind la n: $-8n/(3n+1)=-8/(3+1/n)$, care tinde la $-8/3$.

Pasul 3. Deoarece $2/3$ este pozitiv, putem trece la limită în operația de ridicare la putere: $(2/3)^{(-8/3)}$.

Pasul 4. Eliminăm exponentul negativ: $(2/3)^{(-8/3)}=(3/2)^{(8/3)}$. Putem scrie și $\sqrt[3]{(3/2)^8}$.

Răspuns final

$$L = (3/2)^{(8/3)} = \sqrt[3]{(3^8/2^8)}$$

Verifică dacă ai înțeles

Dacă o bază este mai mică decât 1 și exponentul este negativ, rezultatul este mai mare decât 1. Formula obținută respectă această verificare.

EXERCIȚIUL 1.5

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 34.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [(3n+2)/(3n+5)]^n$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Acesta este un exemplu din familia $(1+u_n)^{v_n}$, în care baza tinde la 1, iar exponentul crește.

2. Expresia „1 la puterea infinit” nu autorizează simplificarea directă la 1; reprezintă o formă nedeterminată. Numărul $e\approx2{,}71828$ apare natural în astfel de limite.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Transformăm fracția într-un „1 plus ceva”: $3n+2=(3n+5)-3$. Prin urmare, $(3n+2)/(3n+5)=1-3/(3n+5)$.

Pasul 2. Notăm $m_n=(3n+5)/3$. Atunci baza este $1-1/m_n$, iar exponentul n este $m_n-5/3$.

Pasul 3. Scriem $[(1-1/m_n)^{m_n}]^{n/m_n}$. Prima expresie din paranteza interioară tinde la e^{-1}; raportul $n/m_n=3n/(3n+5)$ tinde la 1.

Pasul 4. Prin urmare, limita întregii puteri este $(e^{-1})^1=e^{-1}$. Alternativ, folosim regula demonstrabilă cu logaritmi: dacă $u_n\to0$ și $n\cdot u_n\to c$, atunci $(1+u_n)^n\to e^c$; aici $u_n=-3/(3n+5)$, deci $n\cdot u_n\to-1$.

Răspuns final

$$L = 1/e$$

Verifică dacă ai înțeles

Numărătorul este mai mic decât numitorul: pentru fiecare n, baza este sub 1. Rezultatul $1/e\approx0{,}368$ este, în mod corect, între 0 și 1.

EXERCIȚIUL 1.6

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 35.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [(n+\sqrt{n}+1)/(n+\sqrt[3]{n}+2)]^n$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. √n este rădăcina pătrată, iar $\sqrt[3]{n}$ este rădăcina cubică. Pentru n>1, √n crește mai repede decât $\sqrt[3]{n}$.

2. Deși fracția tinde la 1, nu înseamnă că puterea tinde la 1: exponentul n amplifică diferența mică față de 1.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scădem mental numitorul din numărător: $(n+\sqrt{n}+1)-(n+\sqrt[3]{n}+2)=\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1$. De aceea baza este $1+u_n$, cu $u_n=(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1)/(n+\sqrt[3]{n}+2)$.

Pasul 2. Când n crește, $u_n\to 0$: numărătorul este de ordin √n, iar numitorul este de ordin n. Pentru n suficient de mare $u_n>0$.

Pasul 3. Examinăm $n\cdot u_n=[\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}-1]/[1+\sqrt[3]{n}/n+2/n]$. Numitorul tinde la 1. Numărătorul tinde la +∞ fiindcă √n= n^(1/2) crește mai repede decât $\sqrt[3]{n}=n^{(1/3)}$.

Pasul 4. Aplicăm regula tipică $(1+u_n)^n$: când $u_n\to 0$ și $n\cdot u_n\to+\infty$, puterea tinde la +∞, dacă $1+u_n>0$. O justificare: pentru u_n pozitiv și mic, $\ln(1+u_n)\geq u_n/2$; astfel $n\ln(1+u_n)\to+\infty$.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Este un contraexemplu util pentru greșeala „baza merge la 1, deci puterea merge la 1”. Aici baza merge la 1, dar limita este +∞.

EXERCIȚIUL 1.7

Enunț: p. 16; soluție originală: p. 35.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [1+(3n+5)/(4n^2+8n+2)]^n$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Problema seamănă cu limita care definește numărul e: $(1+c/n)^n \to e^c$.

2. Important nu este numai că fracția adăugată lui 1 tinde la zero, ci și cu cât se apropie de zero.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $u_n=(3n+5)/(4n^2+8n+2)$. Când n devine mare, numărătorul se comportă aproximativ ca 3n și numitorul ca $4n^2$, deci u_n seamănă cu 3/(4n) și tinde la 0.

Pasul 2. Înmulțim cu n și împărțim sus și jos la n^2:
$n\cdot u_n=(3n^2+5n)/(4n^2+8n+2)=(3+5/n)/(4+8/n+2/n^2)$.

Pasul 3. Ultima fracție tinde la 3/4. Aplicăm regula: $(1+u_n)^n \to e^{\lim n\ u_n}$.

Pasul 4. Rezultă e^(3/4). Nu rotunjim e la 2,7 în demonstrație: păstrăm simbolul exact.

Răspuns final

$$L = e^{(3/4)}$$

Verifică dacă ai înțeles

Baza este mai mare decât 1, iar limita găsită este mai mare decât 1. Verificarea semnului este în acord cu rezultatul.

EXERCIȚIUL 1.8

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 35.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1}\right]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Punctul „·” înseamnă înmulțire între două expresii.

2. Limita de bază este $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$; în mod similar $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$. Exponenții au însă mici modificări, pe care trebuie să le luăm în calcul.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Separăm primul factor: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$. Primul merge la e, al doilea la 1, deci factorul întreg merge la e.

Pasul 2. Pentru al doilea factor scriem $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+1} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\left[\frac{3n+1}{2n}\right]}$.

Pasul 3. Baza mare dintre paranteze merge la e. Exponentul exterior $\frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$ merge la 3/2. Al doilea factor merge la $e^{3/2}$.

Pasul 4. Înmulțim limitele pozitive: $e \cdot e^{3/2} = e^{1+3/2} = e^{5/2}$. La înmulțirea puterilor cu aceeași bază, exponenții se adună.

Răspuns final

$$L = e^{5/2}$$

Verifică dacă ai înțeles

Dacă am trata greșit al doilea exponent ca fiind 2n, am obține e^2, nu $e^{5/2}$. Raportul dintre exponent și 2n este decisiv.

EXERCIȚIUL 1.9

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 35.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (1+1/\sqrt{n})^{(n^k)}$, unde $k\in\mathbb{R}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Litera k este un parametru: o valoare reală fixă pe care nu o cunoaștem încă. Rezultatul depinde de k.

2. Exemplul este de tipul $(1+u_n)^{\{v_n\}}$, unde $u_n\to0$ și v_n poate crește sau descrește.

3. Pentru u mic și pozitiv, $\ln(1+u)$ este apropiat de u; mai precis, $\ln(1+u)/u\to1$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Punem $u_n=1/\sqrt{n}=n^{(-1/2)}$. Atunci $u_n\to0$. Exponentul este $v_n=n^k$.

Pasul 2. Calculăm produsul esențial: $v_n\cdot u_n=n^k\cdot n^{(-1/2)}=n^{(k-1/2)}$. La înmulțirea puterilor cu aceeași bază n, adunăm exponenții.

Pasul 3. Dacă $k<1/2$, exponentul $k-1/2$ este negativ, deci $n^{(k-1/2)}\to0$ și limita este $e^0=1$. Dacă $k=1/2$, produsul este exact 1, deci limita este $e^1=e$.

Pasul 4. Dacă $k>1/2$, produsul tinde la $+\infty$ și puterea tinde la $+\infty$. Obținem trei situații distincte; nu avem voie să scriem un singur răspuns fără a examina k.

Răspuns final

$L = 1\ (k<1/2);\ e\ (k=1/2);\ +\infty\ (k>1/2)$

Verifică dacă ai înțeles

Testează trei valori: $k=0$, $k=1/2$ și $k=1$. Verifică dacă răspunsurile sunt 1, e și respectiv $+\infty$.

EXERCIȚIUL 1.10

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 36.

Enunțul problemei

$\lim_{n\to\infty} [(an+b)/(an+c)]^{(n^k)}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ și $k\in\mathbb{N}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. În expresie, an înseamnă a înmulțit cu n, nu a la puterea n.

2. Trebuie să observăm și cazul excepțional b=c, pentru că el face baza exact egală cu 1.

3. Factorul a poate fi negativ. Totuși, raportul (an+b)/(an+c) este pozitiv pentru n suficient de mare, deoarece numărătorul și numitorul au același semn ca a.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă b=c, numărătorul și numitorul sunt identice: baza este 1, deci limita este 1 pentru orice exponent definit.

Pasul 2. Dacă $b\neq c$, scriem $(an+b)/(an+c)=1+(b-c)/(an+c)$. Notăm $u_n=(b-c)/(an+c)$, astfel încât $u_n\to 0$.

Pasul 3. Calculăm $n^k u_n=[(b-c)n^k]/(an+c)=n^{(k-1)}\cdot[(b-c)/(a+c/n)]$. Coeficientul din paranteză tinde la $(b-c)/a$.

Pasul 4. Pentru k=1 obținem exponentul-limită $(b-c)/a$, deci $e^{[(b-c)/a]}$. Pentru $k>1$, $n^{(k-1)}$ crește fără limită: dacă $(b-c)/a>0$, limita este $+\infty$; dacă este negativ, limita este 0.

Pasul 5. Dacă folosim convenția $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, trebuie separat k=0: exponentul este 1 și limita raportului este 1. Pentru $k\geq 1$ rămân cazurile precedente.

Răspuns final

L = 1 dacă b=c; pentru $b\neq c$: $e^{[(b-c)/a]}$ dacă k=1; $+\infty$ dacă $k>1$ și $(b-c)/a>0$; 0 dacă $k>1$ și $(b-c)/a<0$. (Pentru k=0: 1.)

Verifică dacă ai înțeles

Verifică semnul lui $(b-c)/a$, nu doar pe cel al lui $b-c$. Dacă $a<0$, semnul se schimbă.

EXERCIȚIUL 1.11

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 36.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ 3^n \cdot \sin(\pi/3^n)$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. π (pi) este un număr constant, aproximativ 3,14159. Funcția „sinus” apare la studiul unghiurilor; este suficient, pentru această problemă, să știm o proprietate a ei în apropierea lui zero.

2. Dacă x se apropie de 0 și este nenul, raportul sin(x)/x se apropie de 1. Unghiul x se măsoară aici în radiani.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $x_n=\pi/3^n$. Deoarece 3^n crește fără limită, numărul $\pi/3^n$ tinde la 0.

Pasul 2. Rescriem în mod ingenios produsul, fără să-i schimbăm valoarea: $3^n\cdot\sin(\pi/3^n)=\pi\cdot[\sin(\pi/3^n)/(\pi/3^n)]$. Verificare: înmulțirea cu π și împărțirea la $\pi/3^n$ reconstituie factorul 3^n.

Pasul 3. Acum raportul dintre paranteze este de forma $\sin(x_n)/x_n$, iar $x_n\to0$. Proprietatea de mai sus arată că raportul tinde la 1.

Pasul 4. Înmulțim π cu 1: obținem π. În loc să calculăm sinusul pentru n foarte mari, am folosit comportamentul său cunoscut aproape de zero.

Răspuns final

$$L = \pi$$

Verifică dacă ai înțeles

Greșeală frecventă: „$\sin(\pi/3^n)\to0$, deci produsul este 0”. Factorul $3^n\to\infty$, așa că produsul $0\cdot\infty$ este nedeterminat și trebuie transformat.

EXERCIȚIUL 1.12

Enunț: p. 17; soluție originală: pp. 36–37.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{1/2}+1}{n^{1/4}+3} - \frac{n^{1/5}+1}{n^{1/10}+1}\right]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Exponentul 1/2 indică radicalul pătrat: $n^{1/2}=\sqrt{n}$; exponentul 1/4 indică rădăcina de ordin patru.

2. Nu scădem direct „infinit minus infinit”, pentru că o astfel de scriere nu are un rezultat automat. Trebuie comparate vitezele de creștere.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Primul raport se comportă aproximativ ca $n^{1/2}/n^{1/4}=n^{1/4}$, fiindcă termenii +1 și +3 contează tot mai puțin în raport cu puterile mari.

Pasul 2. Al doilea raport se comportă aproximativ ca $n^{1/5}/n^{1/10}=n^{1/10}$. Am folosit regula $n^a/n^b=n^{a-b}$.

Pasul 3. Observăm că 1/4 este mai mare decât 1/10. Puterea $n^{1/4}$ crește mult mai repede decât $n^{1/10}$; diferența lor crește fără limită.

Pasul 4. Pentru o justificare riguroasă, împărțim toată diferența la $n^{1/4}$. Primul raport, împărțit la $n^{1/4}$, tinde la 1. Al doilea, împărțit la $n^{1/4}$, tinde la 0, deoarece are ordin $n^{1/10-1/4}=n^{-3/20}$. Diferența inițială, fiind aproximativ $n^{1/4}\cdot(1-0)$, tinde la $+\infty$.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu este suficient să observăm că fiecare fracție tinde separat la $+\infty$. Diferența a două expresii nemărginite poate avea orice comportament; comparația exponenților rezolvă problema.

EXERCIȚIUL 1.13

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 37.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ a^n$, unde $a>0$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Este esențial să separăm cazurile unei baze a mai mici, egale sau mai mari decât 1.

2. Pentru puteri: $a^2=a\cdot a$, $a^3=a\cdot a\cdot a$. Când multiplicăm repetat un număr între 0 și 1, rezultatul scade; când multiplicăm un număr mai mare decât 1, rezultatul crește.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Cazul $0<a<1$. Putem scrie $a=1/(1+t)$, cu $t=1/a-1>0$. Atunci $a^n=1/(1+t)^n$. Cum $(1+t)^n\geq 1+nt\to+\infty$, fracția tinde la 0.

Pasul 2. Cazul $a=1$. Pentru fiecare n avem $1^n=1$, astfel încât șirul este constant și limita este 1.

Pasul 3. Cazul $a>1$. Scriem $a=1+t$, unde $t>0$. Inegalitatea $(1+t)^n\geq 1+nt$ arată că termenii depășesc orice prag și limita este $+\infty$.

Pasul 4. Aceste trei cazuri epuizează toate bazele permise, deoarece ipoteza este $a>0$.

Răspuns final

$L = 0$ pentru $0<a<1$; 1 pentru $a=1$; $+\infty$ pentru $a>1$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică intuitiv pentru bazele 1/2, 1 și 2. Sunt trei șiruri radical diferite.

EXERCIȚIUL 1.14

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 37.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (2a^n+b^n)/(3a^n+4b^n)$, unde $a>0$ și $b>0$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Expresia este o fracție între sume de puteri. Puterea cu baza cea mai mare va domina pentru n mare.

2. Dacă $a>b>0$, raportul b/a este strict între 0 și 1, astfel că $(b/a)^n\to 0$. Dacă $b>a$, procedăm invers.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Cazul $a>b$. Împărțim numărătorul și numitorul la a^n: $[2+(b/a)^n]/[3+4(b/a)^n]$. Deoarece $(b/a)^n\to 0$, limita este 2/3.

Pasul 2. Cazul $a=b$. Înlocuim b cu a: numărătorul devine $(2+1)a^n=3a^n$, numitorul $(3+4)a^n=7a^n$. Simplificăm $a^n>0$ și obținem 3/7.

Pasul 3. Cazul $a<b$. Împărțim la b^n: $[2(a/b)^n+1]/[3(a/b)^n+4]$. Raportul $(a/b)^n\to 0$, deci limita este 1/4.

Pasul 4. Observăm că rezultatul nu depinde de valorile exacte ale lui a și b, ci de ordinea lor.

Răspuns final

$L = 2/3$ dacă $a>b$; $3/7$ dacă $a=b$; $1/4$ dacă $a<b$.

Verifică dacă ai înțeles

Într-un exercițiu de acest tip, nu aduna $2a^n$ cu b^n ca și cum ar fi termeni asemenea; extrage baza dominantă.

EXERCIȚIUL 1.15

Enunț: p. 17; soluție originală: p. 37.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (a^n-b^n)$, unde $a,b\in\mathbb{N}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Pentru două baze naturale, comparația se face după care este mai mare.

2. Dacă $a=b$, puterile sunt identice pentru fiecare n; diferența este exact zero, nu doar „aproape de zero”.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă $a=b$, $a^n-b^n=0$ pentru orice $n\geq 1$. Limita unui șir identic nul este 0.

Pasul 2. Dacă $a>b$, putem scrie $a^n-b^n=a^n[1-(b/a)^n]$. Raportul b/a este mai mic decât 1, așa că $(b/a)^n\to 0$. Pentru $a\geq 2$, $a^n\to+\infty$, iar paranteza tinde la 1; rezultatul este $+\infty$.

Pasul 3. Dacă $a<b$, inversăm rolurile: $a^n-b^n=-b^n[1-(a/b)^n]$. Factorul b^n crește fără limită, iar semnul minus arată că rezultatul tinde la $-\infty$.

Pasul 4. Chiar dacă 0 este inclus în $\mathbb{N}$, analiza funcționează pentru $n\geq 1$: când $a=0<b$, avem $-b^n\to-\infty$; când $a=b=0$, diferența este 0.

Răspuns final

$L = +\infty$ dacă $a>b$; 0 dacă $a=b$; $-\infty$ dacă $a<b$.

Verifică dacă ai înțeles

Exemple: $3^n-2^n\to+\infty$; $5^n-5^n=0$; $2^n-3^n\to-\infty$.

EXERCIȚIUL 1.16

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 37.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (A\cdot a^n+B\cdot b^n+C\cdot c^n)/(A_1\cdot a^n+B_1\cdot b^n+C_1\cdot c^n)$, cu toate constantele strict pozitive

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Literele majuscule A,B,C,A_1,B_1,C_1 sunt coeficienți, iar a,b,c sunt bazele puterilor.

2. Toți coeficienții sunt strict pozitivi. De aceea, dacă două baze sunt egale și maxime, termenii lor se adună, nu se anulează.

3. Ideea principală: împărțim întreaga fracție la M^n, unde M=max(a,b,c). Orice raport al unei baze mai mici la M, ridicat la n, tinde la zero.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă a este singura bază maximă (a>b și a>c), împărțim totul la a^n. Termenii cu $(b/a)^n$ și $(c/a)^n$ tind la zero; rămâne A/A_1.

Pasul 2. Dacă b este singura bază maximă, prin aceeași metodă obținem B/B_1; dacă c este singura maximă, obținem C/C_1.

Pasul 3. Dacă a=b>c, puterile cu baza maximă se adună: $[(A+B)a^n+C\,c^n]/[(A_1+B_1)a^n+C_1c^n]$. Împărțirea la a^n dă $(A+B)/(A_1+B_1)$. Analog pentru b=c>a sau a=c>b.

Pasul 4. Dacă a=b=c, fiecare termen conține aceeași putere. O scoatem factor comun și o simplificăm: limita este $(A+B+C)/(A_1+B_1+C_1)$.

Pasul 5. Acoperim astfel toate modurile în care trei numere pozitive pot avea un maxim: unul singur, două la egalitate sau toate trei la egalitate.

Răspuns final

L = raportul dintre sumele coeficienților care însoțesc baza/bazele maxime: A/A_1, B/B_1, C/C_1, $(A+B)/(A_1+B_1)$, $(B+C)/(B_1+C_1)$, $(A+C)/(A_1+C_1)$ sau $(A+B+C)/(A_1+B_1+C_1)$, după caz.

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu simplificat: $(2\cdot3^n+7\cdot2^n)/(5\cdot3^n+4\cdot2^n)\to2/5$. Dacă baza 3 apare de două ori, coeficienții celor două apariții trebuie însumați.

EXERCIȚIUL 1.17

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 38.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \{[(1+1/n)^3-1]/[(3+1/n)^2-9]\}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. La numărător și numitor obținem 0 dacă înlocuim formal 1/n cu 0. Raportul 0/0 este o formă nedeterminată, nu un răspuns.

2. Ne vom folosi de formulele de dezvoltare: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dezvoltăm numărătorul: $(1+1/n)^3-1=1+3/n+3/n^2+1/n^3-1=3/n+3/n^2+1/n^3$.

Pasul 2. Dezvoltăm numitorul: $(3+1/n)^2-9=9+6/n+1/n^2-9=6/n+1/n^2$.

Pasul 3. Atât sus, cât și jos avem factorul comun 1/n. Îl extragem: $[(1/n)(3+3/n+1/n^2)]/[(1/n)(6+1/n)]$. Îl simplificăm deoarece n este pozitiv.

Pasul 4. Rămâne $(3+3/n+1/n^2)/(6+1/n)$. Toți termenii 1/n și $1/n^2$ tind la zero, deci raportul se apropie de 3/6=1/2.

Răspuns final

$$L = 1/2$$

Verifică dacă ai înțeles

Înainte de a încerca un „truc”, dezvoltă pătratul și cubul. Formula algebrică transformă 0/0 într-o fracție obișnuită.

EXERCIȚIUL 1.18

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 38.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ n(1^3+2^3+\ldots+n^3)/(n+2)^5$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Simbolul $1^3+2^3+\ldots+n^3$ este suma cuburilor primelor n numere naturale.

2. Formula utilă este $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$. Se poate verifica la n=2: 1+8=9, iar $[2\cdot3/2]^2=3^2=9$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Înlocuim suma cuburilor prin formula exactă: $n\cdot[n^2(n+1)^2/4]/(n+2)^5$.

Pasul 2. Efectuăm înmulțirea cu n din față: numărătorul devine $n^3(n+1)^2/4$. Avem așadar $n^3(n+1)^2/[4(n+2)^5]$.

Pasul 3. Scoatem n din paranteze: $n+1=n(1+1/n)$, $n+2=n(1+2/n)$. Astfel, numărătorul conține $n^3\cdot n^2=n^5$, iar numitorul $4n^5$.

Pasul 4. Simplificăm n^5: $[(1+1/n)^2]/[4(1+2/n)^5]$. La limită, $1/n\to0$, deci obținem 1/4.

Răspuns final

$$L = 1/4$$

Verifică dacă ai înțeles

Puterea a cincea din numitor nu este întâmplătoare: suma cuburilor are ordin n^4, iar înmulțirea ei cu n produce ordin n^5. Aceste creșteri se compensează.

EXERCIȚIUL 1.19

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 38.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (a\,n^3+n^2+3)/(b\,n^3+n+6)$, cu $a,b\in\mathbb{R}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. În această fracție, a și b sunt numere fixe; termenii de cel mai mare grad sunt a n^3 și b n^3, dar dacă un coeficient este zero, termenul dispare.

2. Nu putem împărți pur și simplu prin b dacă b=0. De aceea discutăm separat cazurile.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Cazul $b\neq 0$: împărțim numărătorul și numitorul la n^3. Obținem $(a+1/n+3/n^3)/(b+1/n^2+6/n^3)$. Limita este a/b. Valabil inclusiv dacă a=0, când limita este 0.

Pasul 2. Cazul b=0, a>0: numitorul devine n+6>0, iar numărătorul a n^3+n^2+3 crește ca a n^3. Raportul crește aproximativ ca a n^2, deci tinde la $+\infty$.

Pasul 3. Cazul b=0, a<0: numărătorul este în cele din urmă negativ și are modulul de ordin n^3, în timp ce numitorul este de ordin n. Raportul tinde la $-\infty$.

Pasul 4. Cazul b=0, a=0: raportul se reduce la $(n^2+3)/(n+6)$, care se comportă ca n și tinde la $+\infty$.

Răspuns final

$L = a/b$ dacă $b\neq 0$; $+\infty$ dacă $b=0$ și $a\geq 0$; $-\infty$ dacă $b=0$ și $a<0$.

Verifică dacă ai înțeles

Întreabă-te mai întâi dacă b este zero. Aceasta evită eroarea de a scrie a/b atunci când împărțirea nu este definită.

EXERCIȚIUL 1.20

Enunț: p. 18; soluție originală: pp. 38–39.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\Sigma(k=1\ldots n)(1^2+2^2+\ldots+k^2)]/n^4$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Litera greacă Σ („sigma”) înseamnă „adună”. Aici adunăm mai multe sume: pentru k=1, suma este 1^2; pentru k=2, suma este 1^2+2^2; până la k=n.

2. Formula pătratelor este $1^2+2^2+\ldots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Înlocuim fiecare sumă interioară: Σ(k=1…n) k(k+1)(2k+1)/6.

Pasul 2. Înmulțim în paranteze: $k(k+1)(2k+1)=2k^3+3k^2+k$. De aceea expresia devine (1/6) $[2\Sigma k^3+3\Sigma k^2+\Sigma k]$, toate sumele de la k=1 la n.

Pasul 3. Folosim formulele: $\Sigma k=n(n+1)/2$; $\Sigma k^2=n(n+1)(2n+1)/6$; $\Sigma k^3=n^2(n+1)^2/4$. După înlocuire și simplificare obținem $\Sigma\Sigma j^2=n(n+1)(n^2+3n+2)/12$.

Pasul 4. Observăm că $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$; expresia este $n(n+1)^2(n+2)/12$. Împărțim la n^4 și scoatem factori n: $[(1+1/n)^2(1+2/n)]/12$.

Pasul 5. Acum $1/n\to0$, deci fiecare paranteză tinde la 1. Limita este 1/12.

Răspuns final

$$L = 1/12$$

Verifică dacă ai înțeles

Verificare de calcul: pentru n=2, suma dublă este 1+(1+4)=6, iar formula $n(n+1)^2(n+2)/12$ dă $2\cdot9\cdot4/12=6$.

EXERCIȚIUL 1.21

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 39.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ldots+n(n+3)]\ /\ C(n+3,n)$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numărătorul este suma produselor k(k+3), cu k de la 1 până la n.

2. Notația C(n+3,n) reprezintă numărul de combinații de n obiecte din n+3. Formula generală este $C(N,r)=N!/[r!(N-r)!]$, unde semnul „!” înseamnă factorial, de exemplu $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$.

3. Numărul C(n+3,n) este egal cu C(n+3,3); această egalitate rezultă direct din formula factorialelor.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. În numărător, $k(k+3)=k^2+3k$, deci suma este $\Sigma k^2+3\Sigma k$.

Pasul 2. Înlocuim formulele: $n(n+1)(2n+1)/6+3n(n+1)/2$. Aducem la numitor comun 6: $n(n+1)[(2n+1)+9]/6$.

Pasul 3. Calculăm paranteza: $2n+1+9=2n+10=2(n+5)$. Suma este $n(n+1)(n+5)/3$.

Pasul 4. Numitorul se poate calcula exact: $C(n+3,3)=(n+3)(n+2)(n+1)/(3\cdot2\cdot1)=(n+3)(n+2)(n+1)/6$.

Pasul 5. Împărțim cele două fracții și simplificăm n+1: $[n(n+1)(n+5)/3]\cdot[6/((n+3)(n+2)(n+1))] = 2n(n+5)/[(n+3)(n+2)]$.

Pasul 6. Împărțim sus și jos la n^2. Obținem $2(1+5/n)/[(1+3/n)(1+2/n)]\to2$.

Răspuns final

$$L = 2$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu confunda notația C pentru combinații cu o constantă; aici este un număr care depinde de n.

EXERCIȚIUL 1.22

Enunț: p. 18; soluție originală: p. 39.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ (1^2+2^2+\ldots+n^2)/(2n^3+n+5)$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Suma pătratelor are formulă exactă: $1^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

2. Numitorul conține termenul $2n^3$, care domină termenii n și 5. Explicația riguroasă se obține prin împărțire la n^3.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Înlocuim suma cu formula: $[n(n+1)(2n+1)]/[6(2n^3+n+5)]$.

Pasul 2. Punem n în factor comun în fiecare paranteză: $n+1=n(1+1/n)$, $2n+1=n(2+1/n)$. Numărătorul devine $n^3(1+1/n)(2+1/n)$.

Pasul 3. Din numitor scoatem n^3: $2n^3+n+5=n^3(2+1/n^2+5/n^3)$.

Pasul 4. Simplificăm n^3 și obținem $[(1+1/n)(2+1/n)]/[6(2+1/n^2+5/n^3)]$.

Pasul 5. Toți termenii de forma $1/n^p$, unde $p>0$, tind la zero. Rămâne $(1\cdot2)/(6\cdot2)=1/6$.

Răspuns final

$$L = 1/6$$

Verifică dacă ai înțeles

Raportul dintre coeficienții termenilor de grad 3 este $(1/3)/2=1/6$; calculele confirmă această observație.

EXERCIȚIUL 1.23

Enunț: p. 19; soluție originală: pp. 39–40.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (1^k+2^k+\ldots+n^k)/n^m$, cu $k,m\in\mathbb{N}$ pozitive

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici suma de la numărător depinde de două numere fixe k și m. Indicele n este cel care crește.

2. Pentru puteri k naturale pozitive, suma $1^k+\ldots+n^k$ are ordinul lui n^(k+1); mai exact, împărțită la n^(k+1), tinde la 1/(k+1).

3. Vom explica de unde vine coeficientul, fără să presupunem o formulă complicată pentru fiecare sumă de puteri.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $S_n=1^k+2^k+\ldots+n^k$. Diferența dintre două sume consecutive este foarte simplă: $S_{n+1}-S_n=(n+1)^k$.

Pasul 2. Comparăm cu $B_n=n^{(k+1)}$. Diferența $B_{n+1}-B_n=(n+1)^{(k+1)}-n^{(k+1)}$ are termen dominant $(k+1)n^k$, prin dezvoltarea binomială.

Pasul 3. Raportul dintre diferențe tinde la 1/(k+1): $[(n+1)^k]/[(n+1)^{(k+1)}-n^{(k+1)}]\to 1/(k+1)$. Teorema Stolz–Cesàro spune că aceeași limită o are $S_n/n^{(k+1)}$, deoarece B_n crește fără limită.

Pasul 4. Rescriem expresia cerută ca $[S_n/n^{(k+1)}]\cdot n^{(k+1-m)}$. Primul factor tinde la 1/(k+1).

Pasul 5. Dacă k+1<m, al doilea factor tinde la 0. Dacă k+1=m, este identic 1. Dacă k+1>m, crește fără limită.

Răspuns final

$L = 0$ dacă $k<m-1$; $1/m$ dacă $k=m-1$; $+\infty$ dacă $k>m-1$.

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu: pentru k=2 și m=3, suma pătratelor împărțită la n^3 tinde la 1/3. Condiția $k=m-1$ este verificată.

Notă pentru o lecție viitoare: Extindere de nivel: pentru explicarea completă a teoremei Stolz–Cesàro se poate adăuga o lecție separată; aici am arătat exact unde intervine.

EXERCIȚIUL 1.24

Enunț: p. 19; soluție originală: p. 40.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} 2 / [(1+1/n)^k - 1], \text{ cu } k \in \mathbb{N} \text{ pozitiv}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numitorul este diferența dintre o putere aproape de 1 și 1.

2. Dacă această diferență se apropie de zero prin valori pozitive, fracția cu numărător fix pozitiv crește fără limită.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru $n \geq 1$ avem $1+1/n > 1$. Dacă $k \geq 1$, atunci $(1+1/n)^k > 1$, deci numitorul este strict pozitiv.

Pasul 2. Deoarece $1/n \to 0$, baza $1+1/n$ tinde la 1. Ridicarea la puterea fixă k păstrează această apropiere: $(1+1/n)^k \to 1$.

Pasul 3. Numitorul $[(1+1/n)^k - 1]$ tinde la 0, dar rămâne pozitiv. Pentru un exemplu simplu cu $k=1$, fracția este $2/(1/n) = 2n \to +\infty$.

Pasul 4. Pentru orice k fix pozitiv se obține același tip de creștere. Dezvoltarea binomială arată chiar $[(1+1/n)^k - 1] = k/n + \text{termeni de ordin mai mic}$, deci expresia se comportă ca $2n/k$.

Răspuns final

$$L = +\infty \text{ (pentru } k \geq 1).$$

Verifică dacă ai înțeles

Dacă un manual include $k=0$ în mulțimea $\mathbb{N}$, observați că problema nu este definită pentru $k=0$: numitorul ar fi $1-1=0$.

EXERCIȚIUL 1.25

Enunț: p. 19; soluție originală: p. 40.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ n/5^n$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numărătorul crește liniar: n, 2n etc. Numitorul 5^n crește exponențial, prin înmulțiri repetate cu 5.

2. Creșterea exponențială depășește pe termen lung orice putere fixă a lui n. Vom oferi o explicație folosind o inegalitate elementară.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem $5^n=(1+4)^n$. Din înmulțirea parantezei rezultă că toți termenii sunt pozitivi, iar între ei se află 1, 4n și termenul combinatorial $16\cdot n(n-1)/2$.

Pasul 2. De aceea, pentru $n\geq 2$, $5^n\geq 16\cdot n(n-1)/2=8n(n-1)$. Nu trebuie să scriem toți termenii dezvoltării; este suficient să păstrăm unul pozitiv.

Pasul 3. Împărțim n la două numere pozitive comparabile: $0<n/5^n\leq n/[8n(n-1)]=1/[8(n-1)]$.

Pasul 4. Când n crește, $1/[8(n-1)]\to 0$. Cum raportul nostru este cuprins între 0 și o expresie care tinde la 0, și el tinde la 0. Acesta este principiul de încadrare.

Răspuns final

$$L = 0$$

Verifică dacă ai înțeles

Test rapid: la n=5, raportul este 5/3125=0,0016. La n=10, valoarea este mult mai mică.

EXERCIȚIUL 1.26

Enunț: p. 19; soluție originală: pp. 40–41.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ (3^n - n^4)$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Apar două expresii care devin mari, dar în ritmuri diferite: 3^n (exponențială) și n^4 (putere polinomială).

2. Scrierea „$\infty - \infty$” nu spune nimic despre rezultat. Trebuie să vedem care termen crește mai repede.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scoatem factorul comun 3^n: $3^n - n^4 = 3^n[1 - n^4/3^n]$.

Pasul 2. Ne interesează mai întâi fracția $n^4/3^n$. Este cunoscută regula potrivit căreia $n^p/a^n \to 0$ pentru orice p fix și $a>1$. O justificare se poate face folosind un termen suficient de mare din dezvoltarea lui $(1+2)^n$.

Pasul 3. Alegem de exemplu termenul cu șase factori: $3^n \geq 2^6 \cdot [n(n-1)\ldots(n-5)]/6!$ pentru $n \geq 6$. Acesta este de ordin n^6, de aceea $n^4/3^n$ este cel mult o constantă împărțită la n^2 și tinde la 0.

Pasul 4. Prin urmare, paranteza $1 - n^4/3^n$ tinde la 1 și este pozitivă, de exemplu mai mare decât 1/2, de la un anumit n încolo.

Pasul 5. Rezultă $3^n[1 - n^4/3^n] \geq 3^n/2 \to +\infty$. Deci diferența inițială crește fără limită.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Pentru valori mici ale lui n, n^4 poate fi mai mare decât 3^n; acest lucru nu contrazice limita, care privește n foarte mare.

EXERCIȚIUL 1.27

Enunț: p. 19; soluție originală: p. 41.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n]{(2^n+3^n+\ldots+n^n)}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Simbolul $\sqrt[n]{X}$ este rădăcina de ordin n: numărul pozitiv care ridicat la puterea n produce X.

2. În radicand, termenii sunt toți pozitivi; ultimul termen este n^n. Adăugarea termenilor anteriori nu poate micșora suma.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Avem o inegalitate imediată: $2^n+3^n+\ldots+n^n \geq n^n$.

Pasul 2. Funcția rădăcină de ordin n păstrează ordinea între numere nenegative. Aplicând-o, obținem $\sqrt[n]{(2^n+3^n+\ldots+n^n)} \geq \sqrt[n]{(n^n)}=n$.

Pasul 3. Ultima egalitate este exact definiția rădăcinii de ordin n, pentru n pozitiv.

Pasul 4. Dar $n\to+\infty$. Dacă expresia noastră este în permanență cel puțin n, atunci ea depășește orice prag ales. Nu avem nevoie să calculăm sau să aproximăm toată suma.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Acesta este un exemplu excelent de comparație: identificăm un termen suficient de mare și evităm un calcul inutil cu multe puteri.

EXERCIȚIUL 1.28

Enunț: p. 19; soluție originală: p. 41.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ n^n/n!$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Factorialul n! înseamnă produsul numerelor de la 1 la n: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.

2. Puterea n^n înseamnă n înmulțit cu sine de n ori: $n^n=n\cdot n\cdot\ldots\cdot n$.

3. Comparația termen cu termen este foarte eficientă aici.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem raportul sub forma unui produs: $n^n/n! = (n/1)\cdot(n/2)\cdot(n/3)\cdot\ldots\cdot(n/n)$.

Pasul 2. Primul factor este $n/1=n$. Fiecare alt factor n/k este cel puțin 1, fiindcă $k\le n$.

Pasul 3. Prin urmare, întregul produs este cel puțin n: $n^n/n!\ge n$. Nu am folosit nicio aproximație factorială.

Pasul 4. Cum n crește fără limită, și un număr care este mereu cel puțin n trebuie să crească fără limită.

Răspuns final

$$L = +\infty$$

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu la $n=4$: $4^4/4!=256/24\approx10{,}67$, într-adevăr mai mare decât 4.

EXERCIȚIUL 1.29

Enunț: p. 19; soluție originală: pp. 41–42.

Enunțul problemei

$a_n=\Sigma(k=1\dots2^n)\ 1/k$; să se calculeze $\lim(n\to\infty)\ a_n$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Această sumă este $1+1/2+1/3+\dots+1/2^n$. Nu trebuie confundat ultimul termen $1/2^n$ cu suma primilor 2^n termeni.

2. Sumele de forma $1+1/2+\dots+1/N$ se numesc sume armonice. Vom dovedi că ele cresc fără limită prin gruparea termenilor.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem suma pe grupe: $1 + (1/2) + (1/3+1/4) + (1/5+1/6+1/7+1/8) + \dots$.

Pasul 2. Grupa de la $1/2^{j-1}+1$ până la $1/2^j$ are 2^{j-1} termeni, iar fiecare este cel puțin $1/2^j$. Suma acelei grupe este deci cel puțin $2^{j-1}\cdot(1/2^j)=1/2$.

Pasul 3. Pentru limita superioară 2^n, avem n grupe după termenul 1, fiecare contribuind cel puțin 1/2. Rezultă $a_n\geq1+n/2$.

Pasul 4. Deoarece $1+n/2\to+\infty$, și $a_n\to+\infty$. Demonstrația este simplă, dar arată un fapt contraintuitiv: chiar dacă termenii 1/k devin tot mai mici, suma lor poate crește nelimitat.

Răspuns final

$\lim a_n = +\infty$

Verifică dacă ai înțeles

Atenție: o condiție necesară pentru convergența unei sume infinite este ca termenii să tindă la zero, însă aceasta nu este o condiție suficientă. Acest exemplu ilustrează diferența.

EXERCIȚIUL 1.30

Enunț: p. 19; soluție originală: p. 42.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\sqrt{(n+1)}-2\sqrt{(n+2)}+\sqrt{(n+3)}]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici avem o diferență între radicali. Fiecare radical tinde la $+\infty$, dar combinația poate avea o limită finită.

2. Ideea este să grupăm expresia în două diferențe de radicali și să le raționalizăm. Raționalizarea folosește formula $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Regrupăm fără să schimbăm semnele: $\sqrt{(n+1)}-2\sqrt{(n+2)}+\sqrt{(n+3)} = [\sqrt{(n+1)}-\sqrt{(n+2)}] + [\sqrt{(n+3)}-\sqrt{(n+2)}]$.

Pasul 2. Raționalizăm prima diferență:
$\sqrt{(n+1)}-\sqrt{(n+2)}=[(n+1)-(n+2)]/[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{(n+2)}]=-1/[\sqrt{(n+1)}+\sqrt{(n+2)}]$.

Pasul 3. Raționalizăm a doua:
$\sqrt{(n+3)}-\sqrt{(n+2)}=[(n+3)-(n+2)]/[\sqrt{(n+3)}+\sqrt{(n+2)}]=1/[\sqrt{(n+3)}+\sqrt{(n+2)}]$.

Pasul 4. În fiecare fracție, numărătorul este ±1, iar numitorul crește fără limită. Fiecare fracție tinde la 0; suma lor tinde la 0.

Răspuns final

$$L = 0$$

Verifică dacă ai înțeles

Atenție la semnul minus al primei fracții. Două expresii pot tinde fiecare la zero chiar dacă una este negativă și cealaltă pozitivă.

EXERCIȚIUL 1.31

Enunț: p. 20; soluție originală: p. 42.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\sqrt{(n^4+n^2+1)} - \sqrt{(n^4-n^2+1)}]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Din nou avem diferența dintre doi radicali mari. Nu încercăm să scădem separat „infinit minus infinit”.

2. Folosim conjugata: pentru $A,B\geq 0$, $\sqrt{A}-\sqrt{B}=(A-B)/(\sqrt{A}+\sqrt{B})$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Punem $A=n^4+n^2+1$ și $B=n^4-n^2+1$. Scăzând, obținem $A-B=2n^2$.

Pasul 2. Înlocuim diferența de radicali cu raportul $2n^2/[\sqrt{(n^4+n^2+1)}+\sqrt{(n^4-n^2+1)}]$.

Pasul 3. Scoatem n^4 din fiecare radical. Deoarece $\sqrt{(n^4)}=n^2$ pentru $n\geq 0$, numitorul devine $n^2[\sqrt{(1+1/n^2+1/n^4)}+\sqrt{(1-1/n^2+1/n^4)}]$.

Pasul 4. Simplificăm n^2, rămânând $2/[\sqrt{(1+1/n^2+1/n^4)}+\sqrt{(1-1/n^2+1/n^4)}]$.

Pasul 5. Ambele radicale din numitor tind la $\sqrt{1}=1$. Prin urmare raportul tinde la $2/(1+1)=1$.

Răspuns final

$$L = 1$$

Verifică dacă ai înțeles

Dacă ignorăm diferența inițială între termeni de ordin n^2, am putea presupune greșit că limita este zero. Raționalizarea păstrează exact efectul diferenței.

EXERCIȚIUL 1.32

Enunț: p. 20; soluție originală: p. 43.

Enunțul problemei

Se cer limitele: $a_n=\sqrt{(n^2+4n+5)}-\sqrt{(n^2-4n+20)}$; $b_n=\sqrt{(n^2+4n+20)}-\sqrt{(n^2-4n+5)}$; $c_n=\sqrt{(n^2+5n-4\sqrt{(n+8)})}-\sqrt{(n^2-3n+2\sqrt{(n+5)})}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. În toate cele trei exemple, fiecare radical este aproximativ n, însă diferența lor are limită finită.

2. Vom folosi sistematic conjugata și apoi vom împărți prin n. Dacă expresia este $\sqrt{(n^2+u_n)}-\sqrt{(n^2+v_n)}$, diferența este $(u_n-v_n)/[\sqrt{(n^2+u_n)}+\sqrt{(n^2+v_n)}]$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru a_n, diferența radicanzilor este $(n^2+4n+5)-(n^2-4n+20)=8n-15$. Avem $a_n=(8n-15)/[\sqrt{(n^2+4n+5)}+\sqrt{(n^2-4n+20)}]$.

Pasul 2. Împărțim sus și jos la n. Obținem $(8-15/n)/[\sqrt{(1+4/n+5/n^2)}+\sqrt{(1-4/n+20/n^2)}]\to 8/(1+1)=4$.

Pasul 3. Pentru b_n, scăderea dă $(n^2+4n+20)-(n^2-4n+5)=8n+15$. Prin același procedeu, limita este iarăși $8/2=4$.

Pasul 4. Pentru c_n, diferența radicanzilor este $8n-4\sqrt{(n+8)}-2\sqrt{(n+5)}$. Împărțim la n: termenul $8n/n$ devine 8, iar radicalii împărțiți la n tind la zero, fiindcă $\sqrt{n}/n=1/\sqrt{n}\to 0$.

Pasul 5. Fiecare radical mare din numitor, împărțit la n, tinde la 1. Rezultă pentru c_n limita $8/(1+1)=4$.

Răspuns final

$\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = 4$.

Verifică dacă ai înțeles

Cele trei expresii arată aceeași idee cu mici modificări: coeficienții termenilor de grad întâi controlează limita, în timp ce termenii de ordin $\sqrt{n}$ devin neglijabili față de n.

EXERCIȚIUL 1.33

Enunț: p. 20; soluție originală: p. 43.

Enunțul problemei

$a_n=\sqrt{n+2\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+4\sqrt{n+1}}$; $b_n=\sqrt{n+11+8\sqrt{n+5}}-\sqrt{n+4+2\sqrt{n+5}}$; $c_n=\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}$; se cer limitele

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Enunțul conține trei șiruri, toate diferențe de radicali. În ultimele două, trebuie respectate cu atenție radicalele „în interiorul” altor radicale.

2. Rezolvarea din carte folosește conjugata; noi adăugăm o explicație pentru ordinul de mărime al fiecărui termen.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru a_n raționalizăm: numărătorul este $-2\sqrt{n+1}$, iar numitorul este suma celor doi radicali, fiecare comparabil cu $\sqrt{n}$. Împărțind sus și jos la $\sqrt{n}$, obținem la limită $-2/(1+1)=-1$.

Pasul 2. Pentru b_n, după raționalizare numărătorul devine $7+6\sqrt{n+5}$. Numitorul este suma celor două radicale mari, comparabile fiecare cu $\sqrt{n}$. Împărțirea prin $\sqrt{n}$ dă $(7/\sqrt{n}+6\sqrt{1+5/n})/[\text{radical normalizat} + \text{radical normalizat}]\to 6/(1+1)=3$.

Pasul 3. Pentru c_n, radicandul din dreapta este $n-\sqrt{n^2-1}=1/[n+\sqrt{n^2-1}]$, prin conjugare. El tinde la 0; radicalul său tinde și el la 0.

Pasul 4. În schimb, radicandul din stânga este $n+\sqrt{n^2-1}\approx 2n$, iar radicalul său crește fără limită. Diferența dintre ceva care crește fără limită și ceva care tinde la zero crește fără limită.

Răspuns final

$\lim a_n = -1$; $\lim b_n = 3$; $\lim c_n = +\infty$.

Verifică dacă ai înțeles

Problema arată că simpla prezență a doi radicali nu garantează o limită finită: în al treilea caz, unul dintre radicali crește, iar celălalt scade la zero.

EXERCIȚIUL 1.34

Enunț: p. 20; soluție originală: pp. 43–44.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ [\ (\lambda n+\sqrt{(4n^2+3n+1)})/\sqrt{(n^2+3n+4)}\ ]^{[n/(\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)})]}$, cu $\lambda\in\mathbb{R}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Este o putere cu bază și exponent variabile. Trebuie verificat mai întâi dacă baza este pozitivă, pentru că exponentul nu este în general un număr întreg.

2. Pe măsură ce n crește, $\sqrt{(4n^2+3n+1)}/n\to 2$, iar $\sqrt{(n^2+3n+4)}/n\to 1$. Baza se apropie de $\lambda+2$.

3. Exponentul $n/(\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)})$ este aproximativ $\sqrt{n}/2$ și tinde la $+\infty$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă $\lambda<-2$, numărătorul devine negativ pentru n suficient de mare, în timp ce exponentul este real neîntreg. În domeniul numerelor reale, problema nu definește atunci în mod obișnuit o putere reală.

Pasul 2. Dacă $-2\le\lambda<-1$, baza este pozitivă pentru n suficient de mare și se apropie de $\lambda+2$, număr din intervalul $[0,1)$. Deoarece exponentul tinde la $+\infty$, puterea tinde la zero. Pentru $\lambda=-2$, baza tinde la 0 prin valori pozitive.

Pasul 3. Dacă $\lambda>-1$, baza se apropie de un număr mai mare decât 1, iar exponentul crește nelimitat: puterea tinde la $+\infty$.

Pasul 4. Cazul delicat este $\lambda=-1$: baza tinde la 1. Prin raționalizare și dezvoltări, baza este $1-3/(4n)+$termeni mai mici decât $1/n$. Exponentul este de ordin $\sqrt{n}$. Produsul dintre exponent și abaterea de la 1 este de ordin $1/\sqrt{n}$ și tinde la 0; astfel limita puterii este $e^0=1$.

Răspuns final

$L=0$ pentru $-2\le\lambda<-1$; $L=1$ pentru $\lambda=-1$; $L=+\infty$ pentru $\lambda>-1$. Pentru $\lambda<-2$ expresia nu este definită în $\mathbb{R}$ de la un anumit rang.

Verifică dacă ai înțeles

La $\lambda=-1$ nu aplica automat „1 la puterea infinit =1”; este o formă nedeterminată. Rezultatul 1 apare doar după verificarea vitezei cu care baza se apropie de 1.

EXERCIȚIUL 1.35

Enunț: p. 20; soluție originală: p. 44.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ \sqrt[5]{n}\cdot[\sqrt{(n^p+1)}-\sqrt{(n+1)}]$, cu $p\in\mathbb{N}$ pozitiv

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Simbolul $\sqrt[5]{n}$ este rădăcina de ordin cinci a lui n: n^(1/5). Ea se află înaintea parantezei și înmulțește diferența de radicali.

2. Parametrul p este o valoare naturală fixă. Trebuie discutat separat p=1.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă p=1, cele două expresii din radicali sunt identice: √(n+1)−√(n+1)=0. Întregul șir este zero.

Pasul 2. Dacă p>1, primul radical este $\sqrt{(n^p+1)}=n^{(p/2)}\sqrt{(1+1/n^p)}$, deci are ordin n^(p/2).

Pasul 3. Al doilea radical este √(n+1)=n^(1/2)√(1+1/n), cu ordin n^(1/2). Deoarece p/2>1/2, primul radical crește mult mai repede.

Pasul 4. Diferența lor este pozitivă și comparabilă cu n^(p/2), iar înmulțirea cu $\sqrt[5]{n}=n^{(1/5)}$ produce o expresie comparabilă cu n^(p/2+1/5), care crește fără limită.

Răspuns final

$L=0$ pentru $p=1$; $L=+\infty$ pentru $p>1$.

Verifică dacă ai înțeles

Nu confunda indicele 5 de la radicalul exterior cu parametrul p, care apare în n^p sub radicalul pătrat.

EXERCIȚIUL 1.36

Enunț: p. 21; soluție originală: pp. 44–45.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ n^k\ [\sqrt{((n+2)/(n+5))} - 1]$, cu $k\in\mathbb{N}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Avem o diferență între un radical și numărul 1. Când n crește, raportul (n+2)/(n+5) se apropie de 1.

2. Diferența se apropie de zero, dar înmulțirea cu n^k poate produce o limită nenulă sau infinită.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Raționalizăm: √((n+2)/(n+5))−1 = [((n+2)/(n+5))−1]/[√((n+2)/(n+5))+1].

Pasul 2. Diferența de la numărător este [(n+2)−(n+5)]/(n+5)=−3/(n+5).

Pasul 3. Expresia inițială devine $-3n^k/[(n+5)(\sqrt{((n+2)/(n+5))}+1)]$. Împărțim n+5 la n și obținem −3n^(k−1)/[(1+5/n)(√((n+2)/(n+5))+1)].

Pasul 4. Numitorul final tinde la 1·(1+1)=2. Dacă k=1, factorul n^(k−1)=1 și limita este −3/2. Dacă k>1, factorul n^(k−1) crește fără limită, iar semnul este negativ, deci −∞.

Pasul 5. Dacă este admis k=0, atunci n^(−1)→0 și limita este 0.

Răspuns final

L=−3/2 dacă k=1; −∞ dacă k>1; pentru k=0 (dacă este admis) L=0.

Verifică dacă ai înțeles

Este esențial să simplificăm înainte de a discuta exponentul k. Semnul minus se păstrează până la final.

EXERCIȚIUL 1.37

Enunț: p. 21; soluție originală: p. 45.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^2+n+1}-an\right],\ \text{unde } a\in\mathbb{R}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina cubică a lui n^2 crește ca $n^{2/3}$, care este mai lent decât n.

2. Termenul $-an$ crește liniar în modul, dacă $a\neq 0$, și poate avea semn pozitiv sau negativ.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scoatem n^2 de sub radical: $\sqrt[3]{n^2+n+1}=n^{2/3}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Ultimul factor tinde la 1.

Pasul 2. Dacă $a>0$, scriem diferența ca $n\left[n^{-1/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-a\right]$. Paranteza tinde la $-a<0$, iar $n\to\infty$, deci limita este $-\infty$.

Pasul 3. Dacă $a<0$, termenul $-an$ este pozitiv și crește ca $|a|n$; radicalul este și el pozitiv. Suma crește fără limită, deci rezultatul este $+\infty$.

Pasul 4. Dacă $a=0$, rămâne doar radicalul cubic, care se comportă ca $n^{2/3}$ și tinde la $+\infty$.

Răspuns final

$$L=+\infty \text{ pentru } a\leq 0;\ L=-\infty \text{ pentru } a>0.$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu te baza doar pe faptul că ambii termeni devin mari; compară exponenții 2/3 și 1.

EXERCIȚIUL 1.38

Enunț: p. 21; soluție originală: p. 45.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{2n+1}\right]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina de ordin 5 a unui număr pozitiv crește odată cu acel număr. Deoarece 2n+1>n+1, expresia este negativă pentru n>0.

2. Pentru n mare, termenii sunt de ordin n^(1/5), dar au coeficienți diferiți.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scoatem n din fiecare radicand: $\sqrt[i]{n+1}=n^{1/5}\cdot(1+1/n)^{1/5}$; similar $\sqrt[i]{2n+1}=n^{1/5}\cdot(2+1/n)^{1/5}$.

Pasul 2. Factorizăm n^(1/5): expresia devine $n^{1/5}[(1+1/n)^{1/5}-(2+1/n)^{1/5}]$.

Pasul 3. Paranteza tinde la $1-2^{1/5}$, care este un număr strict negativ. Factorul $n^{1/5}$ crește fără limită.

Pasul 4. Un număr pozitiv care crește fără limită, înmulțit cu un factor care tinde la o constantă negativă nenulă, produce $-\infty$.

Răspuns final

$$L=-\infty.$$

Verifică dacă ai înțeles

Chiar dacă diferența dintre cele două rădăcini pare să se micșoreze relativ la valori, în valoare absolută ea crește ca n^(1/5).

EXERCIȚIUL 1.39

Enunț: p. 21; soluție originală: p. 45.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\sqrt[k]{(n^k+n^{k-1}+\ldots+1)}-n],\ \text{cu } k\geq 2 \text{ natural}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Expresia din radical este un polinom ale cărui puteri descresc de la n^k până la 1.

2. Rădăcina de ordin k a lui n^k este n; scăzând n obținem inițial o formă nedeterminată.

3. Ideea originală este să raționalizăm o diferență de rădăcini de ordin k folosind identitatea $x^k-y^k=(x-y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+y^{k-1})$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $x=\sqrt[k]{(n^k+n^{k-1}+\ldots+1)}$. Atunci $x^k=n^k+n^{k-1}+\ldots+1$, iar $x^k-n^k=n^{k-1}+\ldots+1$.

Pasul 2. Din identitate obținem $x-n=(n^{k-1}+\ldots+1)/(x^{k-1}+x^{k-2}n+\ldots+n^{k-1})$.

Pasul 3. Împărțim numărătorul și numitorul la n^{k-1}. Numărătorul devine $1+1/n+\ldots+1/n^{k-1}\to 1$.

Pasul 4. În numitor apar k termeni. Deoarece $x/n=\sqrt[k]{(1+1/n+\ldots+1/n^k)}\to 1$, fiecare termen, după împărțirea prin n^{k-1}, tinde la 1. Suma tinde la k.

Răspuns final

$$L=1/k.$$

Verifică dacă ai înțeles

Pentru k=2, problema se reduce la $\sqrt{(n^2+n+1)}-n$, care tinde la 1/2 — un exemplu simplu al formulei generale.

EXERCIȚIUL 1.40

Enunț: p. 21; soluție originală: p. 46.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}}-\sqrt[k]{n}\right], \text{ cu } k \text{ natural, } k\geq 2$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Este o expresie cu trei radicali de ordin k, introduși unul în altul.

2. Mai întâi examinăm cât se adaugă lui n sub radicalul cel mai exterior. Această corecție este mult mai mică decât n atunci când $k\geq 2$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $t_n=\sqrt[k]{n+\sqrt[k]{n}}$. Atunci expresia devine $(n+t_n)^{(1/k)}-n^{(1/k)}$.

Pasul 2. Factorizăm $n^{(1/k)}$: $n^{(1/k)}[(1+t_n/n)^{(1/k)}-1]$. Deoarece $t_n\approx n^{(1/k)}$, avem $t_n/n\approx n^{(1/k-1)}\to 0$.

Pasul 3. Pentru u foarte mic, $(1+u)^{(1/k)}-1$ este aproximativ u/k. Astfel diferența este aproximativ $(1/k)n^{(1/k)}\cdot t_n/n\approx(1/k)n^{(2/k-1)}$.

Pasul 4. Dacă $k=2$, exponentul $2/k-1$ este 0, iar limita este 1/2. Dacă $k\geq 3$, exponentul este negativ, deci puterea tinde la 0.

Răspuns final

$L=1/2$ pentru $k=2$; $L=0$ pentru $k\geq 3$.

Verifică dacă ai înțeles

Aproximarea poate fi justificată exact prin identitatea de la exercițiul 1.39 și împărțirea cu puterea dominantă a lui n.

EXERCIȚIUL 1.41

Enunț: p. 21; soluție originală: p. 46.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\sqrt[k]{(n+\sqrt[k]{(n^{k-1}+\sqrt[k]{n})})}-\sqrt[k]{n}],\ k\geq 2$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Această problemă seamănă cu 1.40, dar rădăcina interioară conține n^{k-1}, mult mai mare decât n.

2. Tocmai această modificare face ca limita să fie 1/k pentru toate valorile $k\geq 2$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $t_n=\sqrt[k]{(n^{k-1}+\sqrt[k]{n})}$. Deoarece n^{k-1} domină $\sqrt[k]{n}$, rezultă $t_n\approx n^{((k-1)/k)}$.

Pasul 2. Expresia este $\sqrt[k]{(n+t_n)}-\sqrt[k]{n}=n^{(1/k)}[(1+t_n/n)^{(1/k)}-1]$.

Pasul 3. Raportul t_n/n este aproximativ $n^{(-1/k)}$ și tinde la 0. Folosim apropierea $(1+u)^{(1/k)}-1\approx u/k$ pentru u mic.

Pasul 4. Expresia devine aproximativ $n^{(1/k)}\cdot(1/k)\cdot n^{(-1/k)}=1/k$. O demonstrație exactă rezultă prin folosirea conjugatei de ordin k și a faptului că $t_n/n^{((k-1)/k)}\to 1$.

Răspuns final

$$L=1/k.$$

Verifică dacă ai înțeles

Compară 1.40 și 1.41: schimbarea lui n în n^{k-1} sub radicalul intermediar modifică limita. Nu învăța o regulă mecanică „orice radical imbricat dă zero”.

EXERCIȚIUL 1.42

Enunț: p. 21; soluție originală: pp. 46–47.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ [(a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p)^{(1/p)} - (b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b^q)^{(1/q)}]$, coeficienții pozitivi, $p,q\geq 2$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Fiecare termen este rădăcina de ordin p sau q a unui polinom. Pentru n mare, prima rădăcină se comportă ca $a_0^{(1/p)}\cdot n$, iar a doua ca $b_0^{(1/q)}\cdot n$.

2. Soluția tipărită discută mai ales situația $a_0=b_0=1$. Aici marcăm separat o extensie matematică importantă: coeficienții principali pot fi diferiți de 1, dar rădăcinile lor pot fi egale.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scoatem n^p din primul radicand: $P_n^{(1/p)}=n\cdot[a_0+a_1/n+a_2/n^2+\ldots]^{(1/p)}$. Analog, $Q_n^{(1/q)}=n\cdot[b_0+b_1/n+\ldots]^{(1/q)}$.

Pasul 2. Notăm $A=a_0^{(1/p)}$, $B=b_0^{(1/q)}$. Dacă $A>B$, diferența este aproximativ $n(A-B)$ și tinde la $+\infty$. Dacă $A<B$, tinde la $-\infty$.

Pasul 3. Dacă $A=B$, termenii de ordin n se anulează. Pentru a găsi limita finită, folosim faptul că, atunci când t este mic, $(c+t)^{(1/p)}=c^{(1/p)}+t/[p\ c^{((p-1)/p)}]+$termeni mai mici decât t.

Pasul 4. Aplicăm această regulă cu $c=a_0$, $t=a_1/n+O(1/n^2)$, apoi înmulțim cu n. Primul radical este $A\ n + a_1/[p\ a_0^{((p-1)/p)}]+o(1)$. Al doilea este $B\ n+b_1/[q\ b_0^{((q-1)/q)}]+o(1)$.

Pasul 5. Dacă $A=B$, termenii An și Bn se reduc. Limita este diferența celor două constante. În cazul particular $a_0=b_0=1$, obținem $a_1/p-b_1/q$, exact formula din soluția tipărită pentru această ipoteză.

Răspuns final

$L=+\infty$ dacă $a_0^{(1/p)}>b_0^{(1/q)}$; $-\infty$ dacă $a_0^{(1/p)}<b_0^{(1/q)}$; iar la egalitate, $L=a_1/[p\ a_0^{((p-1)/p)}]-b_1/[q\ b_0^{((q-1)/q)}]$.

Verifică dacă ai înțeles

Notă de verificare editorială: prezentarea din carte nu explicitează toate cazurile de egalitate a coeficienților principali după extragerea rădăcinilor. Extinderea de aici este o derivare suplimentară, nu o transcriere literală a cărții.

EXERCIȚIUL 1.43

Enunț: p. 22; soluție originală: p. 47.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[5]{n^{5/4}+n+1} - \sqrt[5]{n^{5/4}-n+1}\right]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Ambii radicali de ordin 5 sunt mari, dar diferența radicanzilor este doar 2n.

2. Folosim identitatea pentru diferența puterilor de ordin 5, în loc de conjugata simplă pentru radicali pătrați.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $x=\sqrt[5]{n^{5/4}+n+1}$ și $y=\sqrt[5]{n^{5/4}-n+1}$. Atunci $x^5-y^5=2n$.

Pasul 2. Identitatea $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$ dă $x-y=2n/[x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4]$.

Pasul 3. Pentru n mare, atât x cât și y sunt comparabile cu $\sqrt[5]{n^{5/4}}=n^{1/4}$.

Pasul 4. Fiecare dintre cele cinci produse de grad 4 este comparabil cu n, iar raportul exact față de n tinde la 1. Numitorul împărțit la n tinde la 5.

Pasul 5. Împărțim numărătorul și numitorul la n: limita este 2/5.

Răspuns final

$$L=2/5.$$

Verifică dacă ai înțeles

Cele cinci produse din numitor explică apariția lui 5. Acesta nu este un coeficient ghicit, ci rezultatul identității algebrice.

EXERCIȚIUL 1.44

Enunț: p. 22; soluție originală: p. 48.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} n^k \left[\sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}\right],\ k\in\mathbb{R}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici apar două radicale de ordine diferite: rădăcina cubică și rădăcina pătrată.

2. Ambele fracții din radicali tind la 1; diferența tinde la 0. Factorul n^k poate schimba limita în funcție de k.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem $(n+1)/(n+2)=1-1/(n+2)$ și $(n+3)/(n+4)=1-1/(n+4)$. Ambele abateri de la 1 sunt de ordin 1/n.

Pasul 2. Pentru t foarte mic, $(1-t)^{(1/3)}\approx 1-t/3$ și $(1-t)^{(1/2)}\approx 1-t/2$. Aplicăm cu $t=1/(n+2)$, respectiv $t=1/(n+4)$.

Pasul 3. Diferența celor două radicale este aproximativ $[1-1/(3n)]-[1-1/(2n)]=1/(6n)$. O raționalizare de ordine 6, ca în carte, justifică riguros coeficientul 1/6.

Pasul 4. Expresia completă este astfel comparabilă cu $n^k/(6n)=(1/6)n^{(k-1)}$.

Pasul 5. Dacă $k<1$, puterea $n^{(k-1)}$ tinde la 0; dacă $k=1$, este 1; dacă $k>1$, crește fără limită.

Răspuns final

$L=0$ pentru $k<1$; $1/6$ pentru $k=1$; $+\infty$ pentru $k>1$.

Verifică dacă ai înțeles

Nu presupune că cei doi radicali se compensează exact pentru că ambele baze tind la 1. Coeficienții 1/3 și 1/2 sunt diferiți.

EXERCIȚIUL 1.45

Enunț: p. 22; soluție originală: pp. 48–49.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ n^k\ [\sqrt[4]{(n+a)}-\sqrt[4]{(n+b)}],\ a,b>0,\ k\in\mathbb{R}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina de ordin 4 a lui n+a este (n+a)^(1/4).

2. Când a=b, cele două numere sunt identice; rezultatul este zero pentru orice n. Când a≠b, semnul diferenței este semnul lui a−b.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru a≠b folosim $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$, unde $x=\sqrt[4]{(n+a)}$, $y=\sqrt[4]{(n+b)}$.

Pasul 2. Avem $x^4-y^4=(n+a)-(n+b)=a-b$. Astfel, $x-y=(a-b)/(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$.

Pasul 3. Atât x, cât și y sunt aproximativ n^(1/4); fiecare produs de grad 3 din numitor este aproximativ n^(3/4). Există patru astfel de produse.

Pasul 4. Prin urmare, $n^k(x-y)$ este aproximativ $[(a-b)/4]\cdot n^{(k-3/4)}$.

Pasul 5. Dacă k<3/4, limita este zero. Dacă k=3/4, limita este (a−b)/4. Dacă k>3/4, valoarea absolută crește fără limită, iar semnul este dat de a−b.

Răspuns final

Dacă a=b, L=0. Dacă a≠b: L=0 pentru k<3/4; (a−b)/4 pentru k=3/4; +∞ sau −∞ pentru k>3/4 după semnul lui a−b.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru k=3/4 verifică faptul că n^k compensează exact factorul n^(−3/4) al diferenței de radicali.

EXERCIȚIUL 1.46

Enunț: p. 22; soluție originală: p. 49.

Enunțul problemei

$a_n=\prod(j=1\ldots kn)(1+j/(kn))$, $k\in\mathbb{N}$ pozitiv; se cer $\lim(a_n/a_{n+1})$ și $\lim a_n$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Semnul ∏ („pi mare”) înseamnă „înmulțește” pentru toate valorile indicate.

2. Când k este fix, produsul are kn factori. Vom introduce o expresie auxiliară F(m)=∏(j=1…m)(1+j/m), apoi folosim m=kn.

3. Factorialul permite să scriem produsul fără puncte de suspensie.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Calculăm $F(m)=[(m+1)(m+2)\ldots(2m)]/m^m=(2m)!/[m!\cdot m^m]$.

Pasul 2. Raportul dintre doi termeni consecutivi este $F(m+1)/F(m)=2(2m+1)/(m+1)\cdot[m/(m+1)]^m$. Primul factor tinde la 4, iar al doilea la e^{-1}, deci raportul tinde la 4/e.

Pasul 3. Pentru $a_n=F(kn)$, numărul m crește cu k când trecem de la n la n+1. Înmulțind k rapoarte consecutive, obținem $a_{n+1}/a_n\to(4/e)^k$; inversând, $a_n/a_{n+1}\to(e/4)^k$.

Pasul 4. Pentru limita lui a_n, observăm că pentru cel puțin jumătate dintre factorii $j\geq kn/2$, avem $1+j/(kn)\geq 3/2$. Așadar produsul depășește (3/2)^[⌊kn/2⌋], care crește fără limită.

Răspuns final

$\lim(a_n/a_{n+1})=(e/4)^k$; $\lim a_n=+\infty$.

Verifică dacă ai înțeles

Nu confunda raportul a_n/a_{n+1} cu cel invers; primul este sub 1, al doilea peste 1, deoarece $4/e>1$.

EXERCIȚIUL 1.47

Enunț: p. 22; soluție originală: p. 50.

Enunțul problemei

$a_n=\prod(j=1\ldots2n)(1+j/(2n))$; se cer $\lim(a_{n+1}/a_n)$ și $\lim a_n$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Acest șir este cazul particular k=2 al exercițiului 1.46.

2. Este util să recunoaștem că două probleme aparent diferite pot fi rezolvate prin aceeași structură de calcul.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Definim $F(m)=\prod(j=1\ldots m)(1+j/m)$. Atunci $a_n=F(2n)$.

Pasul 2. Din calculul exact al factorialelor, $F(m+1)/F(m)\to4/e$.

Pasul 3. Când n crește cu 1, argumentul m=2n crește cu 2. Scriem $a_{n+1}/a_n=F(2n+2)/F(2n)=[F(2n+2)/F(2n+1)]\cdot[F(2n+1)/F(2n)]$.

Pasul 4. Ambii factori tind la 4/e, astfel produsul tinde la $(4/e)^2=16/e^2$.

Pasul 5. Ca și înainte, produsul a_n conține cel puțin n factori de valoare $\geq3/2$; astfel $a_n\geq(3/2)^n\to+\infty$.

Răspuns final

$\lim(a_{n+1}/a_n)=16/e^2$; $\lim a_n=+\infty$.

Verifică dacă ai înțeles

Dacă răspunsul la primul punct ar fi $e^2/16$, ar fi fost calculat raportul invers.

EXERCIȚIUL 1.48

Enunț: p. 22; soluție originală: p. 50.

Enunțul problemei

Să se arate că $\Sigma(s=2\ldots\infty)\ \Sigma(n=2\ldots\infty)\ 1/n^s = 1$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Avem două semne de sumă infinită. Pentru fiecare $n\geq 2$, adunăm mai întâi puterile inverse ale lui n, cu s=2,3,4,…

2. O progresie geometrică este o sumă în care fiecare termen se obține înmulțind precedentul cu același raport. Dacă $|r|<1$, $1+r+r^2+\ldots=1/(1-r)$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru un n fix, suma pe s este $1/n^2+1/n^3+\ldots=(1/n^2)[1+1/n+1/n^2+\ldots]$.

Pasul 2. Raportul geometric este 1/n, strict mai mic decât 1. Astfel suma este $(1/n^2)/[1-1/n]=1/[n(n-1)]$.

Pasul 3. Acum adunăm pentru n=2,3,4,… . Observăm că $1/[n(n-1)]=1/(n-1)-1/n$.

Pasul 4. Suma parțială de la n=2 la N devine $(1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+(1/(N-1)-1/N)=1-1/N$.

Pasul 5. Când N crește fără limită, $1/N\to 0$, deci suma este 1. Fiind termeni pozitivi, putem schimba ordinea sumelor fără să modificăm valoarea.

Răspuns final

Suma dublă este 1.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică telescoparea pe primele trei valori n=2,3,4. Termenii intermediari se anulează.

EXERCIȚIUL 1.49

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 50.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1\ldots n} k/[(2k-1)(2k+1)]^2$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Suma conține fracții pozitive, dar tot mai mici. Căutăm o identitate care transformă fiecare fracție într-o diferență.

2. Aceasta este metoda telescopării: mulți termeni se anulează când se adună.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Observăm că $(2k+1)^2-(2k-1)^2=8k$. Prin urmare, $k/[(2k-1)^2(2k+1)^2]=[1/(8)]\cdot[1/(2k-1)^2-1/(2k+1)^2]$.

Pasul 2. Scriem suma parțială: $(1/8)[(1/1^2-1/3^2)+(1/3^2-1/5^2)+\ldots+(1/(2n-1)^2-1/(2n+1)^2)]$.

Pasul 3. Toate fracțiile intermediare se anulează două câte două, rămânând $(1/8)[1-1/(2n+1)^2]$.

Pasul 4. Deoarece $(2n+1)^2\to+\infty$, ultima fracție tinde la zero.

Răspuns final

$$L=1/8.$$

Verifică dacă ai înțeles

Este instructiv să verifici prima identitate cu $k=1$: $1/(1\cdot3)^2=1/9$, iar $(1/8)(1-1/9)=1/9$.

EXERCIȚIUL 1.50

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 51.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \Sigma(k=1\ldots n)\ (3k^2+3k+1)/[k^3(k+1)^3]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numărătorul $3k^2+3k+1$ seamănă cu diferența a două cuburi consecutive.

2. Formula $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$ poate fi verificată prin înmulțirea $(k+1)(k+1)(k+1)$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Rescriem numărătorul: $3k^2+3k+1=(k+1)^3-k^3$.

Pasul 2. Împărțim pe două fracții: $[(k+1)^3-k^3]/[k^3(k+1)^3]=1/k^3-1/(k+1)^3$.

Pasul 3. Suma de la $k=1$ până la n devine $(1-1/2^3)+(1/2^3-1/3^3)+\ldots+(1/n^3-1/(n+1)^3)$.

Pasul 4. Se anulează toți termenii intermediari. Rămâne $1-1/(n+1)^3$.

Pasul 5. Când $n\to\infty$, $1/(n+1)^3\to0$, deci suma tinde la 1.

Răspuns final

$$L=1.$$

Verifică dacă ai înțeles

Structura este asemănătoare exercițiului 1.49, dar aici folosim cuburi, nu pătrate.

EXERCIȚIUL 1.51

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 51.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ [\Sigma(k=0\ldots n)(k+1)(k+2)\ldots(k+p)]/n^{(p+1)}$, $p\in\mathbb{N}$ pozitiv

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Produsul $(k+1)(k+2)\ldots(k+p)$ are p factori. De exemplu, pentru $p=2$, el este $(k+1)(k+2)$.

2. Vom construi o identitate exactă care permite adunarea fără a desface toate parantezele.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Definim $Q(k)=k(k+1)\ldots(k+p)$, produs cu $p+1$ factori.

Pasul 2. Calculăm $Q(k+1)-Q(k)$. Ambele produse conțin factorii $(k+1)(k+2)\ldots(k+p)$, pe care îi scoatem în față.

Pasul 3. Rămâne diferența $(k+p+1)-k=p+1$. Prin urmare, $Q(k+1)-Q(k)=(p+1)(k+1)\ldots(k+p)$.

Pasul 4. Sumăm egalitatea pentru $k=0,1,\ldots,n$. Termenii Q se telescopiază: $(p+1)\Sigma$ produs$=Q(n+1)-Q(0)$.

Pasul 5. Deoarece $Q(0)=0$, suma este $[(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)]/(p+1)$. La numărător sunt $p+1$ factori, fiecare aproximativ n.

Pasul 6. Împărțim la $n^{(p+1)}$; fiecare factor $(n+j)/n$ tinde la 1. Rămâne $1/(p+1)$.

Răspuns final

$L=1/(p+1)$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $p=1$, suma este $1+2+\ldots+(n+1)$ și limita împărțită la n^2 este $1/2$, în acord cu formula.

EXERCIȚIUL 1.52

Enunț: p. 23; soluție originală: pp. 51–52.

Enunțul problemei

$a_k=a_1+(k-1)r$, $a_1,r>0$; $A_n=\Sigma(k=1\dots n)1/(a_ka_{k+1})$. Se cere lim A_n.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Șirul $a_1,a_2,a_3,\dots$ este o progresie aritmetică: de la un termen la următorul adăugăm același număr r.

2. În consecință, $a_{k+1}-a_k=r$. Acest fapt simplifică surprinzător fracția de la numărător.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pornim de la identitatea $1/a_k-1/a_{k+1}=(a_{k+1}-a_k)/(a_ka_{k+1})=r/(a_ka_{k+1})$.

Pasul 2. Împărțim la $r>0$: $1/(a_ka_{k+1})=(1/r)(1/a_k-1/a_{k+1})$.

Pasul 3. Adunăm pentru $k=1,\dots,n$. Toți termenii intermediari se anulează și obținem $A_n=(1/r)(1/a_1-1/a_{n+1})$.

Pasul 4. Cum $a_{n+1}=a_1+nr$ și $r>0$, termenul a_{n+1} crește fără limită; inversul său tinde la 0.

Pasul 5. Rămâne $A_n\to(1/r)(1/a_1)=1/(a_1r)$.

Răspuns final

$L=1/(a_1r)$.

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu cu $a_1=2$ și $r=1$: limita sumei $1/(2\cdot3)+1/(3\cdot4)+\dots$ este 1/2.

EXERCIȚIUL 1.53

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 52.

Enunțul problemei

$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{p=0\ldots n-1}\, p!/(p+k)!$, k natural, $k\geq 2$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Factorialul p! înseamnă $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p$, cu $0!=1$ prin convenție.

2. Parametrul k este fix; indicele p parcurge numerele $0,1,\ldots,n-1$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Observăm două fracții apropiate: $p!/(p+k-1)!$ și $(p+1)!/(p+k)!$.

Pasul 2. Aducem la același numitor: $p!/(p+k-1)!-(p+1)!/(p+k)! = p![(p+k)-(p+1)]/(p+k)! =(k-1)p!/(p+k)!$.

Pasul 3. Împărțim prin $k-1>0$ și obținem termenul sumat ca diferență telescopică.

Pasul 4. Suma de la $p=0$ la $n-1$ devine $[1/(k-1)]\cdot[0!/(k-1)!-n!/(n+k-1)!]$.

Pasul 5. Pentru $k\geq 2$, fracția $n!/(n+k-1)!$ are la numitor cel puțin factorul $n+1$ și tinde la 0.

Pasul 6. Rămâne $1/[(k-1)(k-1)!]$.

Răspuns final

$L=1/[(k-1)(k-1)!]$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $k=2$, suma $0!/2!+1!/3!+\ldots$ tinde la 1; poți verifica primele câteva sume parțiale.

EXERCIȚIUL 1.54

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 52.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1\ldots n} [1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]/[2\cdot4\cdot6\cdots(2k+2)]$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numărătorul este produsul numerelor impare până la $2k-1$, iar numitorul produsul numerelor pare până la $2k+2$.

2. Căutăm două produse apropiate care, scăzute, dau termenul din sumă.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Definim $u_k=[1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)]/[2\cdot4\cdot6\cdots(2k)]$.

Pasul 2. Atunci $u_{k+1}=u_k\cdot(2k+1)/(2k+2)$, deoarece la produs se adaugă exact un factor impar și unul par.

Pasul 3. Diferența este $u_k-u_{k+1}=u_k[1-(2k+1)/(2k+2)]=u_k/(2k+2)$, adică exact fracția din sumă.

Pasul 4. Prin telescopare, suma de la $k=1$ la n este $u_1-u_{n+1}=1/2-u_{n+1}$.

Pasul 5. Arătăm că $u_n\to0$: produsul $u_n=\prod_{j=1\ldots n}(1-1/(2j))$. Deoarece $\ln(1-x)\le-x$ pentru $0<x<1$, avem $\ln u_n\le-(1/2)\sum(1/j)\to-\infty$, deci $u_n\to0$.

Pasul 6. Prin urmare, suma tinde la $1/2$.

Răspuns final

$$L=1/2.$$

Verifică dacă ai înțeles

Pentru o demonstrație fără logaritmi, rezultatul $u_n\to0$ poate fi studiat ulterior prin inegalități pentru produsele fracțiilor impare/pare.

EXERCIȚIUL 1.55

Enunț: p. 23; soluție originală: p. 53.

Enunțul problemei

$a_n=[(n^2+1)(n^2-n+1)(n^2-2n+1)]^n/(n^2+n)^{(3n)}$; să se calculeze lim a_n

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Produsul are trei factori în paranteza de sus, fiecare ridicat în total la puterea n. La numitor avem (n^2+n) de 3n ori.

2. Este util să despărțim în produsul a trei rapoarte, fiecare la puterea n.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem $a_n=[(n^2+1)/(n^2+n)]^n\cdot[(n^2-n+1)/(n^2+n)]^n\cdot[(n^2-2n+1)/(n^2+n)]^n$.

Pasul 2. Pentru primul raport, împărțim la n^2: $(1+1/n^2)/(1+1/n)=1-1/n+$termeni de ordin mai mic. Ridicarea la puterea n dă limita e^{-1}.

Pasul 3. Pentru al doilea raport, $(1-1/n+1/n^2)/(1+1/n)=1-2/n+$termeni mai mici; puterea n tinde la e^{-2}.

Pasul 4. Pentru al treilea raport, $(1-2/n+1/n^2)/(1+1/n)=1-3/n+$termeni mai mici; puterea n tinde la e^{-3}.

Pasul 5. Al treilea raport se poate scrie exact $(n-1)^2/[n(n+1)]=(1-1/n)^2/(1+1/n)$. Aceasta confirmă că termenul principal al abaterii de la 1 este $-3/n$; corecțiile de ordin $1/n^2$ dispar după înmulțirea cu n.

Pasul 6. Înmulțim cele trei limite: $e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot e^{-3}=e^{-6}$.

Răspuns final

$L=e^{-6}$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică prin logaritmare: $\ln a_n=n[\ln R_1+\ln R_2+\ln R_3]\to-1-2-3=-6$. Acest control este util pentru a evita erorile de exponent.

EXERCIȚIUL 1.56

Enunț: p. 24; soluție originală: p. 53.

Enunțul problemei

$a_n = \prod(i=1\ldots p)\ [(n^2+a_i\,n+b_i)/(n^2+\alpha_i\,n+\beta_i)]^n$, unde coeficienții sunt reali și p natural fix; se cere lim a_n

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Produsul ∏ înseamnă că înmulțim p fracții, cu p fix. Fiecare fracție tinde la 1, dar apoi este ridicată la puterea n.

2. O limită de tipul $(1+c/n)^n$ este de forma e^c. De aceea trebuie identificat termenul de ordin 1/n din fracție.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru un indice i fix, împărțim numărătorul și numitorul la n^2: $(1+a_i/n+b_i/n^2)/(1+\alpha_i/n+\beta_i/n^2)$.

Pasul 2. Scădem 1 din această fracție: $u_{i,n}=[(a_i-\alpha_i)/n+(b_i-\beta_i)/n^2]/[1+\alpha_i/n+\beta_i/n^2]$. Așadar $u_{i,n}\to 0$.

Pasul 3. Înmulțim cu n: $nu_{i,n}\to a_i-\alpha_i$, deoarece termenii împărțiți la n dispar și numitorul tinde la 1.

Pasul 4. Rezultă că fracția i, ridicată la puterea n, tinde la e^($a_i-\alpha_i$). Cum sunt doar p factori, putem înmulți limitele.

Pasul 5. Produsul e^($a_1-\alpha_1$)·…·e^($a_p-\alpha_p$) este e la puterea sumei exponenților.

Răspuns final

$L = \exp[(a_1-\alpha_1)+\ldots+(a_p-\alpha_p)]$.

Verifică dacă ai înțeles

Coeficienții b_i și β_i nu mai apar în răspuns: ei sunt legați de $1/n^2$ și nu influențează limita după înmulțirea cu n.

EXERCIȚIUL 1.57

Enunț: p. 24; soluție originală: p. 54.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [(1+\sin(\pi/n))/(1+\tan(\pi/n))]^n$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Sinusul și tangenta sunt funcții trigonometrice. În jurul lui zero, sin x și tan x sunt foarte apropiate de x.

2. Cum $\pi/n\to0$, ambele expresii $1+\sin(\pi/n)$ și $1+\tan(\pi/n)$ tind la 1. Avem totuși o putere cu exponent n, deci trebuie justificată limita.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $x_n=\pi/n\to0$. Folosim $\sin x/x\to1$ și $\tan x/x\to1$ pentru $x\to0$.

Pasul 2. Primul factor $(1+\sin x_n)^n$ are exponentul critic $n\cdot\sin(\pi/n)\to\pi$. Prin urmare, el tinde la $e^{\wedge}\pi$.

Pasul 3. În mod analog, $n\cdot\tan(\pi/n)\to\pi$, astfel $(1+\tan(\pi/n))^n\to e^{\wedge}\pi$.

Pasul 4. Raportul dintre două limite finite nenule $e^{\wedge}\pi$ și $e^{\wedge}\pi$ tinde la 1.

Răspuns final

$$L=1.$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu deduce direct „$1^n=1$”: baza tinde la 1, dar exponentul crește. Am comparat separat două limite de tip e.

EXERCIȚIUL 1.58

Enunț: p. 24; soluție originală: pp. 54–55.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [1 + \sqrt[n]{(n^{(2n+1)})/n!}]^{[n!/e^n]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici avem simultan factorialul n!, rădăcina de ordin n, exponentul $n!/e^n$ și o bază apropiată de 1.

2. Pentru o limită $(1+u_n)^{v_n}$, cu $u_n>0$ și $u_n\to0$, produsul v_nu_n este esențial.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Simplificăm radicalul: $\sqrt[n]{(n^{(2n+1)})}=n^{[(2n+1)/n]}=n^2\cdot n^{(1/n)}$. Aceasta este regula $(a^b)^c=a^{(bc)}$.

Pasul 2. Notăm $u_n=n^2n^{(1/n)}/n!$, care tinde la 0 deoarece factorialul crește mai repede decât orice putere fixă; exponentul $v_n=n!/e^n$ tinde la $+\infty$.

Pasul 3. Înmulțim exact: $v_nu_n=[n!/e^n]\cdot[n^2n^{(1/n)}/n!]=n^2n^{(1/n)}/e^n$. Factorialele se simplifică.

Pasul 4. Știm că $n^{(1/n)}\to1$. Raportul $n^2/e^n\to0$, deoarece o exponențială de bază $e>1$ domină orice putere fixă. Prin urmare $v_nu_n\to0$.

Pasul 5. Aplicăm regula e pentru formele de tip 1^∞: $(1+u_n)^{v_n}\to e^0=1$.

Răspuns final

$$L=1.$$

Verifică dacă ai înțeles

Înainte de orice aproximație, simplifică produsul exponentului cu termenul mic: n! se anulează complet.

EXERCIȚIUL 1.59

Enunț: p. 24; soluție originală: p. 55.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ (n^2+5n+6)^{[1/(n^2+6n+7)]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Baza tinde la $+\infty$, însă exponentul tinde la 0. Forma ∞^0 este nedeterminată.

2. Logaritmul natural transformă o putere într-un produs: $\ln(x^y)=y\ln x$, pentru $x>0$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $A_n=(n^2+5n+6)^{[1/(n^2+6n+7)]}$. Atunci $\ln A_n=\ln(n^2+5n+6)/(n^2+6n+7)$.

Pasul 2. Pentru n mare, $\ln(n^2+5n+6)$ crește aproximativ ca $2\ln n$, mult mai încet decât n^2. De exemplu, $\ln(n^2+5n+6)\le\ln(Cn^2)=\ln C+2\ln n$ pentru un C fix și n suficient de mare.

Pasul 3. Numitorul este comparabil cu n^2 și crește mult mai repede, deci fracția $\ln A_n$ tinde la 0.

Pasul 4. Ridicăm la puterea e: $A_n=e^{\{\ln A_n\}}\to e^0=1$.

Răspuns final

$$L=1.$$

Verifică dacă ai înțeles

Un rezultat de tipul ∞^0 poate fi 1 în anumite situații, dar nu în toate. Aici ritmul extrem de mic al exponentului este decisiv.

EXERCIȚIUL 1.60

Enunț: p. 24; soluție originală: pp. 55–56.

Enunțul problemei

Se cer: (1) $\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n]{n}$; (2) $\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n]{(n^2+4n+7)}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina de ordin n a unui număr pozitiv x este x^(1/n). Când ordinul radicalului crește, rezultatul poate ajunge aproape de 1.

2. Este utilă limita generală ln n/n→0. Ea se poate demonstra prin comparații sau prin studierea ritmurilor de creștere.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru primul șir, scriem $\sqrt[n]{n}=n^{(1/n)}$. Logaritmul său este (ln n)/n→0, deci radicalul tinde la $e^0=1$.

Pasul 2. Pentru al doilea șir, scoatem n^2: $\sqrt[n]{(n^2+4n+7)}=n^{(2/n)}\cdot(1+4/n+7/n^2)^{(1/n)}$.

Pasul 3. Primul factor este $[n^{(1/n)}]^2\to1^2=1$. Al doilea factor are baza care tinde la 1 și exponentul 1/n→0; logaritmul său tinde la 0, astfel factorul tinde la 1.

Pasul 4. Produsul limitelor este 1. O justificare alternativă: pentru n mare, $1<n^2+4n+7<Cn^3$; rădăcinile de ordin n ale ambelor extreme tind la 1.

Răspuns final

$L_1=1$; $L_2=1$.

Verifică dacă ai înțeles

Nu confunda √n cu $\sqrt[n]{n}$: primul crește fără limită, al doilea tinde la 1.

EXERCIȚIUL 1.61

Enunț: p. 24; soluție originală: p. 56.

Enunțul problemei

lim(n→∞) (1/n)^(1/n)

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Baza tinde la zero, iar exponentul tinde tot la zero. Scrierea 0^0 este o formă nedeterminată în analiza limitelor.

2. Transformarea (1/n)^(1/n)=1/[n^(1/n)] este exactă pentru n>0.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Aplicăm regula puterilor cu exponent negativ: (1/n)^(1/n)=n^(−1/n)=1/n^(1/n).

Pasul 2. Din exercițiul precedent, n^(1/n)→1, iar numitorul este pozitiv.

Pasul 3. Prin regula limitei unui raport cu numitor-limită nenul, 1/n^(1/n)→1/1=1.

Răspuns final

L=1.

Verifică dacă ai înțeles

Baza tinde la zero, dar puterea nu tinde la zero; exponentul se micșorează suficient de repede pentru ca rezultatul să se apropie de 1.

EXERCIȚIUL 1.62

Enunț: p. 25; soluție originală: p. 56.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n^2]{(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n)}$, cu $a_i\in\mathbb{N}$ și k natural fix

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Ordinul radicalului este n^2, nu n. Numerele $a_1,\ldots,a_k$ sunt fixe, iar k este numărul fix al termenilor din sumă.

2. Vom compara suma cu cel mai mare termen.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $M=\max(a_1,\ldots,a_k)$, presupunând $M>0$. Fiecare a_i^n este cel mult M^n, iar cel puțin un termen este egal cu M^n.

Pasul 2. Prin urmare, $M^n\le a_1^n+\ldots+a_k^n\le kM^n$. Scoatem rădăcina de ordin n^2, care păstrează inegalitățile între termeni pozitivi.

Pasul 3. Obținem $M^{(1/n)}\le\sqrt[n^2]{(\text{suma})}\le k^{(1/n^2)}\cdot M^{(1/n)}$.

Pasul 4. Pentru orice $M>0$ și $k>0$ fixe, $M^{(1/n)}\to1$ și $k^{(1/n^2)}\to1$. Prin încadrare, și expresia din mijloc tinde la 1.

Pasul 5. Dacă toate a_i ar fi zero, suma ar fi zero și limita ar fi 0; aceasta este o precizare necesară doar dacă convenția pentru $\mathbb{N}$ include 0 și permite toate bazele nule.

Răspuns final

$L=1$ dacă $\max(a_1,\ldots,a_k)>0$; $L=0$ dacă toate $a_i=0$ (caz posibil doar dacă $0\in\mathbb{N}$).

Verifică dacă ai înțeles

Atenție la indicele n^2 al radicalului: dacă ar fi doar n, limita ar fi în general M, nu 1.

EXERCIȚIUL 1.63

Enunț: p. 25; soluție originală: p. 57.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n]{(n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k)}$, cu $a_i>0$ și $k\in\mathbb{N}$ fix

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Radicandul este un polinom în n cu termenul dominant n^k, iar radicalul are ordin n, care crește.

2. Putem scoate n^k din radicand și apoi folosi regulile puterilor.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Rescriem $n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_k=n^k[1+a_1/n+a_2/n^2+\ldots+a_k/n^k]$.

Pasul 2. Rădăcina de ordin n este n^(k/n)·[1+a_1/n+…+a_k/n^k]^(1/n).

Pasul 3. Pentru factorul n^(k/n), logaritmul este (k ln n)/n→0, deci factorul tinde la 1.

Pasul 4. Baza parantezei pătrate tinde la 1, iar exponentul 1/n tinde la 0; logaritmul acestei puteri tinde la 0. Și acest factor tinde la 1.

Pasul 5. Produsul celor două limite este 1.

Răspuns final

$L=1$.

Verifică dacă ai înțeles

Exercițiul se leagă de 1.60: rădăcina de ordin n a unui polinom de grad fix tinde la 1, dacă polinomul este pozitiv pentru n suficient de mare.

EXERCIȚIUL 1.64

Enunț: p. 25; soluție originală: p. 57.

Enunțul problemei

(1) Dacă $a_n \to a$, demonstrați $(a_1+\ldots+a_n)/n \to a$. (2) Este adevărată reciproca?

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Media aritmetică a primelor n numere este suma lor împărțită la n.

2. Teorema lui Cesàro spune că media unui șir convergent are aceeași limită. Conversa poate fi falsă, pentru că oscilațiile se pot compensa în medie.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru demonstrație, scriem $a_j = a + (a_j - a)$. Media este $a + (1/n)\Sigma(a_j - a)$. Trebuie să arătăm că ultima medie tinde la 0.

Pasul 2. Alegem un $\varepsilon > 0$. Deoarece $a_j \to a$, există un rang N de la care toate diferențele $|a_j - a|$ sunt mai mici decât ε.

Pasul 3. Despărțim suma în două părți: primele $N-1$ diferențe și restul. Primele formează o sumă fixă, a cărei împărțire la n tinde la zero; restul are modulul cel mult $\varepsilon \cdot (n-N+1)/n \le \varepsilon$.

Pasul 4. Astfel, media diferențelor devine oricât de mică și media termenilor tinde la a.

Pasul 5. Pentru reciprocă luăm $a_n = (-1)^n$. Șirul oscilează între -1 și 1 și nu are limită. Totuși, suma primilor n termeni este 0 sau -1, astfel media ei tinde la 0.

Răspuns final

(1) Adevărat: media converge la a. (2) Fals în general; contraexemplu $a_n = (-1)^n$.

Verifică dacă ai înțeles

Media poate ascunde alternanța termenilor. Nu concluziona că termenii au limită doar pentru că media lor are limită.

EXERCIȚIUL 1.65

Enunț: p. 25; soluție originală: pp. 57–59.

Enunțul problemei

(1) Dacă $a_n>0$ și $a_n\to a$, arătați că $\sqrt[n]{(a_1a_2\dots a_n)}\to a$. (2) Reciproca?

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. $\sqrt[n]{(a_1a_2\dots a_n)}$ este media geometrică a primilor n termeni pozitivi.

2. Logaritmul transformă produsul într-o sumă: $\ln(a_1\dots a_n)=\ln a_1+\dots+\ln a_n$. Folosim astfel teorema mediilor aritmetice.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă $a>0$, avem $\ln a_n\to\ln a$, prin continuitatea logaritmului. Conform exercițiului 1.64, $(\ln a_1+\dots+\ln a_n)/n\to\ln a$.

Pasul 2. Dar această medie este exact $\ln(\sqrt[n]{(a_1\dots a_n)})$. Aplicând exponențiala, obținem că media geometrică tinde la e^{ln a}=a.

Pasul 3. Dacă $a=0$ și $a_n>0$, pentru orice $\varepsilon>0$ termenii de după un anumit rang sunt sub ε. Atunci produsul până la n este cel mult o constantă fixă înmulțită cu ε la puterea $n-N$; rădăcina de ordin n tinde la cel mult ε. Cum ε este arbitrar, limita este 0.

Pasul 4. Reciproca este falsă: alegem $a_{2j-1}=2$ și $a_{2j}=1/2$. Produsele pe perechi sunt egale cu 1, astfel mediile geometrice tind la 1, dar termenii alternează și nu converg.

Răspuns final

(1) Media geometrică tinde la a. (2) Reciproca este falsă.

Verifică dacă ai înțeles

Faptul că media geometrică se stabilizează nu spune că fiecare factor individual se stabilizează.

EXERCIȚIUL 1.66

Enunț: p. 25; soluție originală: pp. 59–60.

Enunțul problemei

(1) Dacă $a_n>0$ și $a_{n+1}/a_n\to a$, arătați că $\sqrt[n]{a_n}\to a$. (2) Este adevărată reciproca?

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Raportul a_{n+1}/a_n măsoară factorul de creștere de la un termen la următorul.

2. Orice termen a_n se poate scrie ca primul termen înmulțit cu toate rapoartele intermediare.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem $a_n=a_1\cdot(a_2/a_1)\cdot(a_3/a_2)\cdot\ldots\cdot(a_n/a_{n-1})$. Toate fracțiile din interior se simplifică telescopic.

Pasul 2. Luăm rădăcina de ordin n. Primul factor $a_1\text{^}(1/n)\to1$. Media geometrică a rapoartelor, care converg la a, tinde la a prin exercițiul 1.65; diferența dintre n și $n-1$ factori nu schimbă limita.

Pasul 3. Dacă $a=0$, argumentul rămâne valid prin încadrare, deoarece rapoartele sunt pozitive și converg la zero.

Pasul 4. Pentru reciprocă alegem $a_n=2^n\cdot c_n$, unde $c_n=2$ dacă n este par și $c_n=1$ dacă n este impar. Atunci $\sqrt[n]{a_n}=2\cdot c_n\text{^}(1/n)\to2$.

Pasul 5. Dar raportul $a_{n+1}/a_n=2c_{n+1}/c_n$ alternează între 1 și 4; el nu are limită.

Răspuns final

(1) Adevărat: $\sqrt[n]{a_n}\to a$. (2) Reciproca este falsă.

Verifică dacă ai înțeles

Creșterea medie poate fi stabilă, chiar dacă raporturile dintre termeni consecutivi continuă să oscileze.

EXERCIȚIUL 1.67

Enunț: p. 26; soluție originală: pp. 59–60; observație critică adăugată.

Enunțul problemei

Pentru un șir strict monoton, nemărginit, cu $a_{n+1}/a_n \to \ell$, să se calculeze lim $(a_1+\ldots+a_n)/a_n$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Strict monoton înseamnă mereu crescător sau mereu descrescător. Nemărginit înseamnă aici că valorile cresc spre $+\infty$ sau scad spre $-\infty$.

2. Raportul a_{n+1}/a_n măsoară ritmul de creștere. Teorema Stolz–Cesàro compară raportul a două șiruri prin raportul diferențelor lor.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $S_n=a_1+\ldots+a_n$. Diferența dintre sume consecutive este $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$.

Pasul 2. Aplicăm Stolz–Cesàro pentru raportul S_n/a_n: dacă limita raportului diferențelor există, ea este lim $a_{n+1}/(a_{n+1}-a_n)$.

Pasul 3. Împărțim sus și jos la a_n (care este nenul pentru n suficient de mare): $[a_{n+1}/a_n]/[a_{n+1}/a_n-1] \to \ell/(\ell-1)$ când $\ell \neq 1$. În ipotezele de monotonie și nemărginire, limita de raport relevantă este $\ell \geq 1$.

Pasul 4. Dacă $\ell=1$, raportul dintre diferențe crește în valoare pozitivă fără limită: pentru $a_n \to +\infty$, numărătorul și diferența sunt pozitive; pentru $a_n \to -\infty$, ambele sunt negative. În ambele cazuri raportul este pozitiv și tinde la $+\infty$.

Pasul 5. Atenție editorială: soluția tipărită indică $-\infty$ pentru șirul descrescător. Dar exemplul $a_n=-n$ dă $S_n/a_n=[-n(n+1)/2]/(-n)=(n+1)/2 \to +\infty$. Așadar semnul din carte nu poate fi corect în acest caz.

Răspuns final

$L=\ell/(\ell-1)$ dacă $\ell>1$; $L=+\infty$ dacă $\ell=1$ (atât în cazul crescător, cât și descrescător).

Verifică dacă ai înțeles

Acesta este un exemplu în care un contraexemplu foarte simplu poate identifica o greșeală în soluția publicată. Corecția este prezentată separat de sursă.

EXERCIȚIUL 1.68

Enunț: p. 26; soluție originală: p. 61.

Enunțul problemei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Numitorul fiecărei fracții este suma rădăcinilor pătrate de la 1 până la k.

2. Pentru k mare, această sumă este mult mai mare decât k: aproximativ proporțională cu k^(3/2).

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $t_k = k/(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k})$. Pentru orice k, cel puțin aproximativ jumătate dintre termenii de la $j=\lceil k/2 \rceil$ până la k sunt fiecare $\geq \sqrt{(k/2)}$.

Pasul 2. De aceea suma radicalilor este cel puțin $(k/2)\sqrt{(k/2)}$ pentru k suficient de mare; urmează $t_k \leq C/\sqrt{k}$, pentru o constantă $C>0$.

Pasul 3. Cum $1/\sqrt{k} \to 0$, obținem $t_k \to 0$. Nu este necesar să calculăm suma radicalilor exact.

Pasul 4. Expresia cerută este media aritmetică a termenilor $t_1,\ldots,t_n$. Prin teorema lui Cesàro (1.64), dacă $t_k \to 0$, media lor tinde la 0.

Răspuns final

$$L=0.$$

Verifică dacă ai înțeles

Este util să distingem două etape: mai întâi limita termenului $k/(\Sigma\sqrt{j})$, apoi limita mediei acestor termeni.

EXERCIȚIUL 1.69

Enunț: p. 26; soluție originală: p. 61.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ [\Sigma(k=1\ldots n)\ k] \,/\, \sqrt[n]{[n!\cdot(n+1)^n]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. În numărător avem suma $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$.

2. În numitor, rădăcina de ordin n cuprinde produsul $n!\cdot(n+1)^n$. Această grupare este esențială.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Separăm radicalul produsului: $\sqrt[n]{[n!\cdot(n+1)^n]}=\sqrt[n]{(n!)}\cdot(n+1)$. Am folosit $\sqrt[n]{(x\,y)}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$ pentru x,y pozitive.

Pasul 2. Fracția devine $[n(n+1)/2]/[(n+1)\sqrt[n]{(n!)}]=n/[2\sqrt[n]{(n!)}]$.

Pasul 3. Scriem $n/\sqrt[n]{(n!)}=1/\sqrt[n]{(n!/n^n)}$. Pentru factorial se cunoaște limita $\sqrt[n]{(n!)}/n\to 1/e$, care rezultă, de exemplu, din media logaritmilor sau din formula lui Stirling.

Pasul 4. Prin urmare, $n/\sqrt[n]{(n!)}\to e$ și fracția inițială tinde la $e/2$.

Răspuns final

$$L=e/2.$$

Verifică dacă ai înțeles

Poți verifica formula esențială cu logaritmi: $(1/n)\ln(n!)-\ln n=(1/n)\Sigma\ln(k/n)\to\int_0^1 \ln x\,dx=-1$.

EXERCIȚIUL 1.70

Enunț: p. 26; soluție originală: p. 61.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \sqrt[n]{[C(n,1)\cdot C(n,2)\cdot\ldots\cdot C(n,n)]}$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. C(n,k) sunt coeficienți binomiali (combinații): C(n,k)=n!/[k!(n−k)!].

2. Toți factorii produsului sunt pozitivi, așa că putem compara produsul cu o submulțime de factori.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $P_n=\prod(k=1\ldots n)\ C(n,k)$. Pentru aproximativ n/2 valori centrale k, coeficienții C(n,k) sunt foarte mari.

Pasul 2. Putem da și o estimare elementară: pentru k de la n/3 la 2n/3, C(n,k)≥C(n,⌊n/3⌋) pentru n mare, deoarece coeficienții binomiali cresc până la mijloc și apoi descresc simetric.

Pasul 3. Coeficientul C(n,⌊n/3⌋) crește cel puțin exponențial în n. De exemplu, $C(n,m)=\prod(j=1\ldots m)(n-m+j)/j$, iar pentru m≈n/3 fiecare factor este cel puțin aproximativ 2; rezultă o bornă exponențială.

Pasul 4. Produsul P_n are de ordin n factori fiecare cel puțin de ordin 2^(n/3); prin urmare P_n este cel puțin de ordin $2^{(c\ n^2)}$ pentru un c>0.

Pasul 5. Rădăcina de ordin n este atunci cel puțin 2^(c n), care crește fără limită. De aceea limita este +∞.

Răspuns final

$$L=+\infty.$$

Verifică dacă ai înțeles

Nu trata fiecare C(n,k) ca fiind constant: numărul de factori și valorile coeficienților cresc amândouă odată cu n.

EXERCIȚIUL 1.71

Enunț: p. 26; soluție originală: p. 62.

Enunțul problemei

Dacă $a_n>0$ și $a_n\to a$, să se calculeze media mediilor geometric-aritmetice din enunțul exercițiului 1.71

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Problema construiește mai întâi mediile geometrice $G_k=\sqrt[k]{(a_1a_2\dots a_k)}$, apoi mediile $H_k=(G_1+\dots+G_k)/k$, iar în final media $(H_1+\dots+H_n)/n$.

2. În carte această expresie apare desfășurată în fracții cu numitorii $n,2n,3n,\dots,n^2$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Deoarece $a_k\to a$ și toți termenii sunt pozitivi, știm din exercițiul 1.65 că $G_k\to a$.

Pasul 2. Aplicăm teorema lui Cesàro la șirul G_k: media $H_k=(G_1+\dots+G_k)/k$ are aceeași limită a.

Pasul 3. Aplicăm Cesàro încă o dată la șirul H_k: $(H_1+\dots+H_n)/n\to a$.

Pasul 4. Cele două medieri nu schimbă limita, deși formula completă pare complicată. Structura, nu lungimea formulei, este cheia.

Răspuns final

$L=a$.

Verifică dacă ai înțeles

Încercuiește în enunț cele trei niveluri: termenii a_k, mediile geometrice G_k, mediile aritmetice H_k și media finală.

EXERCIȚIUL 1.72

Enunț: p. 27; soluție originală: pp. 62–63.

Enunțul problemei

$S_m=\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k^m/2^k$. Să se arate că $S_0=1$, $S_1=2$ și, pentru $m\geq 2$, $S_m=2+\Sigma(j=1\ldots m-1)\ C(m,j)S_{m-j}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Avem o familie de serii: pentru $m=0$ se adună $1/2^k$, pentru $m=1$ se adună $k/2^k$, iar pentru $m=2$ se adună $k^2/2^k$.

2. Coeficientul $C(m,j)$ este un număr combinatorial din formula binomială $(x+y)^m$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru S_0, seria geometrică dă $1/2+1/4+\ldots=(1/2)/(1-1/2)=1$.

Pasul 2. Pentru $m\geq 1$, înmulțim definiția cu 2: $2S_m=\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k^m/2^{k-1}=1+\Sigma(k=1\ldots\infty)(k+1)^m/2^k$.

Pasul 3. Scădem $S_m=\Sigma k^m/2^k$: $S_m=1+\Sigma[(k+1)^m-k^m]/2^k$.

Pasul 4. Dezvoltăm binomial: $(k+1)^m-k^m=\Sigma(j=1\ldots m)\ C(m,j)k\hat{}(m-j)$. Înlocuind în serie, obținem $S_m=1+\Sigma(j=1\ldots m)C(m,j)S_{m-j}$.

Pasul 5. Termenul $j=m$ este $S_0=1$. Adunăm cele două constante $1+S_0=2$. Rezultă recurența cerută pentru $m\geq 2$. Pentru $m=1$ obținem $S_1=2$.

Răspuns final

$S_0=1$; $S_1=2$; $S_m=2+\Sigma(j=1\ldots m-1)\ C(m,j)S_{m-j}$ $(m\geq 2)$.

Verifică dacă ai înțeles

Din această relație se obțin imediat $S_2=6$ și $S_3=26$. Aceste numere vor fi folosite în exercițiile următoare.

EXERCIȚIUL 1.73

Enunț: p. 27; soluție originală: p. 63.

Enunțul problemei

$T_m=\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k^m/a^k$, $a>1$. Să se demonstreze $T_0=1/(a-1)$, $T_1=a/(a-1)^2$ și recurența pentru $m\geq 2$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Este versiunea cu baza generală $a>1$ a exercițiului 1.72, unde baza era 2.

2. Seria geometrică $\Sigma(k=1\ldots\infty)\ a^{(-k)}$ converge deoarece $1/a$ este între 0 și 1.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru $m=0$, $T_0=(1/a)/(1-1/a)=1/(a-1)$.

Pasul 2. Înmulțim T_m cu a și schimbăm indicele: $aT_m=1+\Sigma(k=1\ldots\infty)(k+1)^m/a^k$.

Pasul 3. Scădem T_m: $(a-1)T_m=1+\Sigma[(k+1)^m-k^m]/a^k$.

Pasul 4. Dezvoltăm binomial și înlocuim fiecare sumă cu T corespunzător: $(a-1)T_m=1+T_0+\Sigma(j=1\ldots m-1)C(m,j)T_{m-j}$.

Pasul 5. Cum $1+T_0=a/(a-1)$, împărțind la $a-1$ obținem $T_m=a/(a-1)^2+[1/(a-1)]\Sigma(j=1\ldots m-1)C(m,j)T_{m-j}$. Pentru $m=1$ suma este goală și obținem $T_1=a/(a-1)^2$.

Răspuns final

$T_0=1/(a-1)$, $T_1=a/(a-1)^2$; $T_m=a/(a-1)^2+[1/(a-1)]\Sigma(j=1\ldots m-1)C(m,j)T_{m-j}$ pentru $m\geq 2$.

Verifică dacă ai înțeles

Înlocuiește $a=2$ pentru a regăsi relațiile problemei 1.72.

EXERCIȚIUL 1.74

Enunț: p. 28; soluție originală: p. 63.

Enunțul problemei

$$\lim(n\to\infty)\ \Sigma(k=1\ldots n)\ (4k^2-3k+1)/2^k$$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Expresia de la numărător este un polinom de grad 2 în k.

2. Putem separa o sumă în trei sume mai simple, deoarece adunarea și înmulțirea cu constante se distribuie.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Scriem $\Sigma(4k^2-3k+1)/2^k = 4\Sigma k^2/2^k - 3\Sigma k/2^k + \Sigma 1/2^k$.

Pasul 2. Din exercițiul 1.72 știm că aceste trei serii au limitele $S_2=6$, $S_1=2$ și $S_0=1$.

Pasul 3. Înlocuim și efectuăm operațiile aritmetice: $4\cdot 6-3\cdot 2+1=24-6+1=19$.

Răspuns final

$$L=19.$$

Verifică dacă ai înțeles

Rezultatul se bazează pe numerele pregătite la 1.72. Acest lucru explică de ce culegerea a plasat exercițiile în această ordine.

EXERCIȚIUL 1.75

Enunț: p. 28; soluție originală: pp. 63–64.

Enunțul problemei

(1) lim $\Sigma(k=3\ldots n)\ k/2^k$; (2) lim $\Sigma(k=3\ldots n)\ k/a^k$, cu $|a|>1$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Sumele încep de la k=3. Valorile cunoscute din exercițiile 1.72 și 1.73 încep de la k=1; vom elimina primii doi termeni.

2. Condiția $|a|>1$ asigură că seria converge, inclusiv pentru a negativ.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru a=2, seria totală $\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k/2^k$ are suma 2. Primii doi termeni sunt 1/2 și 2/4=1/2, în total 1. Suma începând de la k=3 este $2-1=1$.

Pasul 2. Pentru a general, folosim $T_1=\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k/a^k=a/(a-1)^2$ (formula se extinde la $a<-1$ prin convergență absolută).

Pasul 3. Scădem termenii k=1 și k=2: $L=a/(a-1)^2-1/a-2/a^2$.

Pasul 4. Aducem la numitor comun $a^2(a-1)^2$. După calcul, numărătorul se simplifică la $3a-2$.

Pasul 5. Rezultă formula $(3a-2)/[a^2(a-1)^2]$, care pentru a=2 dă $(6-2)/(4\cdot1)=1$.

Răspuns final

$L_1=1$; $L_2=(3a-2)/[a^2(a-1)^2]$ pentru $|a|>1$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică rezultatul al doilea prin înlocuirea lui a=2: trebuie să coincidă cu primul.

EXERCIȚIUL 1.76

Enunț: p. 28; soluție originală: p. 64.

Enunțul problemei

Se cer limitele $\Sigma(k=1\ldots n)\ k^2/2^k$ și $\Sigma(k=1\ldots n)\ k^3/2^k$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Exercițiul reutilizează seria $S_m=\Sigma k^m/2^k$.

2. Nu este necesar să sumăm manual zeci de fracții: recurența stabilită la 1.72 permite calculul exact.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru m=2, formula dă $S_2=2+C(2,1)S_1=2+2\cdot 2=6$.

Pasul 2. Pentru m=3, formula dă $S_3=2+C(3,1)S_2+C(3,2)S_1$.

Pasul 3. Coeficienții combinatoriali sunt $C(3,1)=C(3,2)=3$. Rezultă $S_3=2+3\cdot 6+3\cdot 2=2+18+6=26$.

Pasul 4. Cum seriile converg, sumele parțiale cerute tind tocmai la valorile S_2 și S_3.

Răspuns final

$L_1=6$; $L_2=26$.

Verifică dacă ai înțeles

Calculează primele patru sume parțiale și observă că ele cresc către valorile finale.

EXERCIȚIUL 1.77

Enunț: p. 28; soluție originală: pp. 64–65.

Enunțul problemei

Să se arate că $\lim(n\to\infty)\ \Sigma(k=1\ldots n)\ k/[2\cdot 3^{k-1}] = 9/8$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Factorul 3^{k-1} este o putere a lui 3, iar 2 din numitor este o constantă.

2. Putem recunoaște seria cu termen general kx^{k-1}, obținută prin derivarea sumei geometrice.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru $|x|<1$, avem $1+x+x^2+\ldots=1/(1-x)$. Derivând termen cu termen, rezultă $1+2x+3x^2+\ldots=1/(1-x)^2$.

Pasul 2. Punem $x=1/3$. Obținem $\Sigma(k=1\ldots\infty)\ k/3^{k-1} = 1/(1-1/3)^2=1/(2/3)^2=9/4$.

Pasul 3. Înmulțim cu factorul $1/2$ din enunț: $(1/2)\cdot(9/4)=9/8$.

Răspuns final

$L=9/8$.

Verifică dacă ai înțeles

Poți calcula primele 3–4 sume parțiale ca verificare, dar formula geometrică oferă dovada exactă.

EXERCIȚIUL 1.78

Enunț: p. 28; soluție originală: pp. 65–66.

Enunțul problemei

Se cer limitele $\Sigma(k=1\ldots n)\ 2^{-k}\cos(k\pi/3)$ și $\Sigma(k=1\ldots n)\ 2^{-k}\sin(k\pi/3)$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Sinusul și cosinusul se repetă periodic când k crește.

2. Coeficienții $1/2^k$ scad geometric; seriile converg absolut fiindcă $|\sin|\le 1$ și $|\cos|\le 1$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Introducem o formulă pentru seria geometrică complexă $\Sigma(k=1\ldots\infty)\ r^k[\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)] = r\ e^{\{i\theta\}}/(1-r\ e^{\{i\theta\}})$, validă pentru $0<r<1$. Partea reală este suma cosinusurilor, iar partea imaginară suma sinusurilor.

Pasul 2. Prin înmulțire cu conjugata numitorului obținem formulele reale: $\Sigma r^k\cos(k\theta)=(r\cos\theta-r^2)/(1-2r\cos\theta+r^2)$, iar $\Sigma r^k\sin(k\theta)=r\sin\theta/(1-2r\cos\theta+r^2)$.

Pasul 3. Punem $r=1/2$ și $\theta=\pi/3$. Știm $\cos(\pi/3)=1/2$ și $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$. Numitorul comun este $1-2\cdot(1/2)\cdot(1/2)+1/4=3/4$.

Pasul 4. La cosinus, numărătorul este $(1/2)(1/2)-(1/2)^2=0$. La sinus, numărătorul este $(1/2)(\sqrt{3}/2)=\sqrt{3}/4$.

Pasul 5. Împărțim: $0/(3/4)=0$, respectiv $(\sqrt{3}/4)/(3/4)=\sqrt{3}/3$.

Răspuns final

$L_{cos}=0$; $L_{sin}=\sqrt{3}/3$.

Verifică dacă ai înțeles

Dacă nu ai studiat numere complexe, aceste formule se pot obține și prin gruparea termenilor după perioada 6 a funcțiilor trigonometrice.

EXERCIȚIUL 1.79

Enunț: pp. 28–29; soluție originală: p. 66.

Enunțul problemei

$u_n=(n^3+7n^2+12n+2)/(n+3)!$; (1) descompunere în factoriale; (2) suma $s_n=\Sigma(k=1\ldots n)u_k$; (3) limita

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Factorialele permit descompuneri utile: $1/n!=[(n+1)(n+2)(n+3)]/(n+3)!$.

2. Vom căuta coeficienții a,b,c,d din $u_n=a/n!+b/(n+1)!+c/(n+2)!+d/(n+3)!$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Înmulțim egalitatea cu $(n+3)!$ și obținem o identitate de polinoame: $n^3+7n^2+12n+2 = a(n+1)(n+2)(n+3)+b(n+2)(n+3)+c(n+3)+d$.

Pasul 2. Comparând coeficienții pentru n^3,n^2,n și termenul constant, rezultă $a=1,b=1,c=-4,d=2$. Se poate verifica prin dezvoltare.

Pasul 3. Așadar $u_n=1/n!+1/(n+1)!-4/(n+2)!+2/(n+3)!$. Sumăm de la $n=1$ la N și rearanjăm fracțiile de același factorial.

Pasul 4. După anularea termenilor se obține exact $s_n=5/3-1/(n+1)!-2/(n+2)!+2/(n+3)!$ (formă echivalentă formulei din carte).

Pasul 5. Toți cei trei termeni cu factorial în numitor tind la zero, pentru că factorialul crește fără limită. Limita s_n este $5/3$.

Răspuns final

$a=1,b=1,c=-4,d=2$; $\lim s_n=5/3$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică formula s_n pentru $n=1$ prin calculul lui u_1, înainte de a o folosi la limită.

EXERCIȚIUL 1.80

Enunț: p. 29; soluție originală: pp. 66–67.

Enunțul problemei

$\lim(n\to\infty)\ (1/n)\ \Sigma(i=1\ldots n-k)\ (a+i/n)^p$, unde $k,p\in\mathbb{N}$ fixe și $a\in\mathbb{R}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Termenii sunt valori ale funcției $f(x)=(a+x)^p$ pentru punctele $x=i/n$ din intervalul $[0,1]$.

2. Înmulțirea cu $1/n$ construiește o sumă Riemann, adică o aproximare prin dreptunghiuri a ariei de sub grafic.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă am aduna până la n, $(1/n)\Sigma(i=1\ldots n)\ f(i/n)$ ar fi suma Riemann pentru integrala $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Pasul 2. Enunțul oprește suma la $n-k$, dar k este fix. Lipsesc doar k termeni, fiecare de mărime mărginită pe intervalul $[0,1]$; contribuția lor împărțită la n tinde la 0.

Pasul 3. Prin urmare limita este $\int_0^1 (a+x)^p\,dx$. Pentru p natural, antiderivata este (a+x)^(p+1)/(p+1).

Pasul 4. Evaluăm la capete: $[(a+1)^{(p+1)}-a^{(p+1)}]/(p+1)$.

Pasul 5. O soluție pur algebrică se obține dezvoltând binomial $(a+i/n)^p$ și folosind lim $\Sigma\ i^j/n^{(j+1)}=1/(j+1)$.

Răspuns final

$L=[(a+1)^{(p+1)}-a^{(p+1)}]/(p+1)$.

Verifică dacă ai înțeles

Parametrul k nu apare în rezultat deoarece elimină doar un număr fix de termeni dintr-o medie cu n termeni.

EXERCIȚIUL 1.81

Enunț: p. 29; soluție originală: pp. 67–68.

Enunțul problemei

(1) $\lim(n\to\infty)\ (1/n)\sqrt[n]{(\ln n)}$; (2) $\lim(n\to\infty)(1/n)\Sigma(k=1\ldots n)1/\sqrt[n]{(n^2+k)}$

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. În primul punct este rădăcina de ordin n a lui ln n, apoi totul este împărțit la n.

2. În al doilea punct facem media a n fracții, ale căror numitoare sunt rădăcini de ordin n ale unor numere între n^2+1 și n^2+n.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru (1), deoarece ln n<n pentru n suficient de mare, avem $0<\sqrt[n]{(\ln n)}<\sqrt[n]{n}$. Împărțind prin n, obținem o expresie cuprinsă între 0 și n^(1/n)/n, care tinde la 0.

Pasul 2. Pentru (2), pentru fiecare $k\in\{1,\ldots,n\}$ avem $n^2\le n^2+k\le n^2+n$. Prin extragerea radicalului de ordin n rezultă $n^{(2/n)}\le\sqrt[n]{(n^2+k)}\le(n^2+n)^{(1/n)}$.

Pasul 3. Inversăm fracțiile pozitive: $1/(n^2+n)^{(1/n)}\le1/\sqrt[n]{(n^2+k)}\le1/n^{(2/n)}$.

Pasul 4. Adunăm aceste n inegalități și împărțim la n; obținem aceleași două borne pentru media cerută.

Pasul 5. Ambele borne tind la 1, deoarece rădăcinile de ordin n ale polinoamelor de grad fix tind la 1. Prin încadrare media tinde la 1.

Răspuns final

$L_1=0$; $L_2=1$.

Verifică dacă ai înțeles

Diferența între cele două puncte este factorul 1/n: în primul apare în fața unui singur radical, în al doilea normalizează o sumă cu n termeni.

EXERCIȚIUL 1.82

Enunț: p. 29; soluție originală: pp. 68–69.

Enunțul problemei

Șirurile x_n și y_n satisfac $|x_n - y_n| \leq \varepsilon_n \cdot |y_n|$, cu $\varepsilon_n > 0$ și $\varepsilon_n \to 0$. Demonstrați că dacă unul converge, atunci și celălalt converge la aceeași limită.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Semnul $|z|$ se citește „modulul lui z” și măsoară distanța până la zero: $|-3| = 3$. Astfel, $|x_n - y_n|$ exprimă distanța dintre doi termeni.

2. O condiție esențială este $\varepsilon_n \to 0$. Ea spune că eroarea relativă dintre cele două șiruri devine tot mai mică.

3. Vom separa cele două posibilități: șirul y_n converge sau șirul x_n converge. Nu avem voie să presupunem de la început că ambele sunt mărginite.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Presupunem mai întâi că $y_n \to L$. Un șir convergent este mărginit: există o constantă $M > 0$ pentru care $|y_n| \leq M$ la toate rangurile.

Pasul 2. Din ipoteză obținem $0 \leq |x_n - y_n| \leq M\varepsilon_n$. Cum $M\varepsilon_n \to 0$, teorema încadrării arată că $|x_n - y_n| \to 0$.

Pasul 3. Scriem $x_n = y_n + (x_n - y_n)$. Primul termen tinde la L, iar al doilea la zero; rezultă $x_n \to L$.

Pasul 4. Presupunem acum că $x_n \to L$. Din $|x_n - y_n| \leq \varepsilon_n |y_n|$ și inegalitatea triunghiulară, $|y_n| \leq |x_n| + |x_n - y_n| \leq |x_n| + \varepsilon_n |y_n|$.

Pasul 5. Pentru n destul de mare, $\varepsilon_n \leq 1/2$. Mutăm termenul cu $|y_n|$ la stânga: $(1 - \varepsilon_n)|y_n| \leq |x_n|$, de unde $|y_n| \leq 2|x_n|$. Cum x_n converge, $|x_n|$ este mărginit, deci și $|y_n|$ este mărginit la ranguri mari.

Pasul 6. Revenim la $|x_n - y_n| \leq \varepsilon_n |y_n|$: produsul din dreapta tinde la zero. Ambele șiruri au astfel aceeași limită L.

Răspuns final

Dacă unul dintre șiruri este convergent, ambele sunt convergente și au aceeași limită.

Verifică dacă ai înțeles

Întrebare: de ce a fost nevoie să demonstrăm mai întâi mărginirea lui y_n în al doilea caz? Fără ea, produsul $\varepsilon_n |y_n|$ nu ar avea automat limita zero.

EXERCIȚIUL 1.83

Enunț: p. 29; soluție originală: p. 69.

Enunțul problemei

$u_n=(1/\sqrt{2})[u_0\sqrt{(1+u_{n-1})}-\sqrt{(1-u_0^2)}\sqrt{(1-u_{n-1})}]$, $n\geq 1$, $u_0\in[0,1]$. Se cere $\lim u_n$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Recurrența este o regulă prin care fiecare termen este calculat folosind termenul precedent. Pentru a calcula u_2, avem nevoie de u_1, iar pentru u_1 de u_0.

2. O formulă trigonometrică utilă este $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$. Alta este $\cos(\theta/2)=\sqrt{[(1+\cos\theta)/2]}$ și $\sin(\theta/2)=\sqrt{[(1-\cos\theta)/2]}$, când θ este între 0 și π.

3. Fiindcă $0\leq u_0\leq 1$, există un unghi $\alpha\in[0,\pi/2]$ cu $u_0=\cos\alpha$. Atunci $\sqrt{(1-u_0^2)}=\sin\alpha$, pozitiv.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Alegem α astfel încât $u_0=\cos\alpha$. Notăm că u_0 se poate scrie și $\cos(2\alpha-\alpha)$, o formă care va sugera un model pentru termenii următori.

Pasul 2. Calculăm primul termen: $u_1=\cos\alpha\cdot\sqrt{[(1+\cos\alpha)/2]}-\sin\alpha\cdot\sqrt{[(1-\cos\alpha)/2]}$. Formulele de jumătate de unghi dau $u_1=\cos\alpha\cdot\cos(\alpha/2)-\sin\alpha\cdot\sin(\alpha/2)=\cos(3\alpha/2)$.

Pasul 3. Presupunem că $u_{n-1}=\cos(2\alpha-\alpha/2^{n-1})$. Unghiul $\theta=2\alpha-\alpha/2^{n-1}$ este între 0 și π, deci radicalii din recurență sunt $\cos(\theta/2)$ și $\sin(\theta/2)$, înmulțiți cu $\sqrt{2}$ potrivit factorului $1/\sqrt{2}$.

Pasul 4. Recurența devine $u_n=\cos\alpha\cos(\theta/2)-\sin\alpha\sin(\theta/2)=\cos(\alpha+\theta/2)$. Înlocuim θ: $\alpha+[2\alpha-\alpha/2^{n-1}]/2=2\alpha-\alpha/2^n$.

Pasul 5. Am obținut prin inducție formula $u_n=\cos(2\alpha-\alpha/2^n)$. Deoarece 2^n crește fără limită, $\alpha/2^n\to 0$; continuitatea cosinusului dă $u_n\to\cos(2\alpha)$.

Pasul 6. Aplicăm formula $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$. Cum $\cos\alpha=u_0$, limita este $2u_0^2-1$.

Răspuns final

$L=2u_0^2-1$.

Verifică dacă ai înțeles

Exemple: dacă $u_0=1$, avem $\alpha=0$ și limita 1; dacă $u_0=0$, avem $\alpha=\pi/2$ și limita -1. Ambele sunt compatibile cu formula.

EXERCIȚIUL 1.84

Enunț: p. 30; soluție originală: p. 69.

Enunțul problemei

$u_n=\sin^2[\pi\sqrt{(n^2+n)}]$. Determinați limita când $n\to\infty$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Expresia $\sin^2 t$ înseamnă $(\sin t)^2$, nu $\sin(t^2)$.

2. Sinusul are perioadă 2π, iar pătratul sinusului are perioadă π. Prin urmare, $\sin^2(\pi n+z)=\sin^2 z$ pentru n întreg.

3. Cheia este să observăm cât de aproape se află $\sqrt{(n^2+n)}$ de $n+1/2$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Rationalizăm diferența $\sqrt{(n^2+n)}-n$, înmulțind sus și jos cu $\sqrt{(n^2+n)}+n$: $\sqrt{(n^2+n)}-n = n/[\sqrt{(n^2+n)}+n]$.

Pasul 2. Împărțim numărătorul și numitorul la $n>0$. Obținem $1/[\sqrt{(1+1/n)}+1]$, care tinde la $1/(1+1)=1/2$.

Pasul 3. Scriem $\sqrt{(n^2+n)}=n+d_n$, unde $d_n\to 1/2$. Astfel $u_n=\sin^2[\pi(n+d_n)]$.

Pasul 4. Fiindcă n este întreg, $\sin[\pi n+\pi d_n]=(-1)^n \sin(\pi d_n)$. Prin ridicare la pătrat, factorul $(-1)^n$ dispare: $u_n=\sin^2(\pi d_n)$.

Pasul 5. Trecem la limită: $u_n\to\sin^2(\pi/2)=1^2=1$. Nu am introdus „infinit” în interiorul funcției sinus, ci am transformat argumentul folosind periodicitatea.

Răspuns final

$L=1$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru n mare, $\sqrt{(n^2+n)}$ este foarte aproape de un număr de forma $n+0{,}5$. Sinusul unui multiplu impar al lui $\pi/2$ este ± 1, iar pătratul este 1.

EXERCIȚIUL 1.85

Enunț: p. 30; soluție originală: pp. 69–70.

Enunțul problemei

$u_0=1$, $u_1=1/2$, $u_n=(1/12)u_{n-1}+(1/2)u_{n-2}$ $(n\geq 2)$. Aflați u_n și $\lim u_n$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. O relație de recurență de ordinul al doilea folosește doi termeni anteriori. De aceea sunt date două valori inițiale.

2. Pentru o recurență liniară cu coeficienți constanți, încercăm soluții de forma $u_n=r^n$. Înlocuirea conduce la o ecuație algebrică pentru r.

3. Dacă obținem două rădăcini r_1, r_2 diferite, orice combinație $A\,r_1^n+B\,r_2^n$ verifică recurența; constantele se stabilesc din condițiile inițiale.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Presupunem $u_n=r^n$, cu $r\neq 0$. Introducem în relație: $r^n=(1/12)r^{n-1}+(1/2)r^{n-2}$. Împărțim la r^{n-2}: $r^2-r/12-1/2=0$.

Pasul 2. Înmulțim cu 12: $12r^2-r-6=0$. Prin formula ecuației de gradul al doilea, $r=[1\pm\sqrt{(1+288)}]/24=[1\pm 17]/24$. Rădăcinile sunt $r_1=3/4$ și $r_2=-2/3$.

Pasul 3. Scriem $u_n=A(3/4)^n+B(-2/3)^n$. Pentru $n=0$ trebuie să fie $A+B=1$. Pentru $n=1$ avem $(3/4)A-(2/3)B=1/2$.

Pasul 4. Înlocuind $B=1-A$: $(3/4+2/3)A=1/2+2/3=7/6$. Suma din stânga este $17/12$, deci $A=(7/6)/(17/12)=14/17$. Rezultă $B=3/17$.

Pasul 5. Am obținut formula exactă. Deoarece $|3/4|<1$ și $|-2/3|<1$, ambele puteri tind la zero. Suma tinde, prin urmare, la zero.

Răspuns final

$u_n=(14/17)(3/4)^n+(3/17)(-2/3)^n$; $\lim u_n=0$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică formula pentru $n=0$ și $n=1$. Cele două valori inițiale trebuie să fie exact 1 și 1/2.

EXERCIȚIUL 1.86

Enunț: p. 30; soluție originală: pp. 70–71.

Enunțul problemei

$u_0=3$, $u_1=1$, $u_2=9$, $u_n=u_{n-1}+4u_{n-2}-4u_{n-3}$ ($n\geq 3$). Aflați formula și comportamentul șirului.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Relația implică trei termeni anteriori, deci avem trei valori inițiale.

2. Vom căuta soluții de forma r^n; astfel recurența se transformă într-o ecuație de gradul al treilea.

3. Un șir poate să nu aibă limită chiar dacă o parte a termenilor rămân mici: termenii pari și impari pot avea comportări complet diferite.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Înlocuim $u_n=r^n$ și împărțim la r^{n-3}: $r^3=r^2+4r-4$, adică $r^3-r^2-4r+4=0$.

Pasul 2. Grupăm termenii: $r^2(r-1)-4(r-1)=(r-1)(r^2-4)=(r-1)(r-2)(r+2)$. Rădăcinile sunt $1,2,-2$.

Pasul 3. Forma generală este $u_n=A+B\cdot 2^n+C\cdot(-2)^n$. Din $u_0=3$ obținem $A+B+C=3$. Din $u_1=1$, $A+2B-2C=1$. Din $u_2=9$, $A+4B+4C=9$.

Pasul 4. Rezolvând cele trei ecuații, obținem $A=B=C=1$. Formula devine $u_n=1+2^n+(-2)^n$.

Pasul 5. Dacă n este impar, $(-2)^n=-2^n$, deci $u_n=1$. Dacă n este par, $(-2)^n=2^n$, deci $u_n=1+2^{n+1}$, care crește fără limită.

Pasul 6. Un șir convergent ar trebui ca atât termenii pari, cât și cei impari să se apropie de aceeași valoare. Aici unii rămân la 1 și ceilalți cresc nelimitat, așa că limita nu există.

Răspuns final

$u_n=1+2^n+(-2)^n$; șirul nu are limită.

Verifică dacă ai înțeles

Calcul rapid: $u_3=1$, $u_4=33$, $u_5=1$, $u_6=129$. Acest model confirmă deosebirea dintre pozițiile pare și impare.

EXERCIȚIUL 1.87

Enunț: p. 30; soluție originală: p. 71.

Enunțul problemei

$a_1=b-2a$, $a_n=b-2a_{n-1}$; $a'_1=(b-a)/2$, $a'_n=(b-a'_{n-1})/2$ ($n\geq 2$). Găsiți formulele și limitele.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Avem două șiruri diferite, fiecare cu o valoare inițială și o regulă de formare. Literele a și b sunt parametri fixați.

2. Pentru recurența $x_n=c\cdot x_{n-1}+d$, căutăm un punct fix L care satisface $L=cL+d$. Apoi studiem eroarea x_n-L.

3. Dacă $|c|<1$, eroarea se micșorează geometric și $x_n\to L$. Dacă $|c|>1$, eroarea crește, cu excepția cazului când a fost zero de la început.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru primul șir, punctul fix L satisface $L=b-2L$. Mutăm $-2L$ în stânga: $3L=b$, deci $L=b/3$.

Pasul 2. Scădem L din recurență: $a_n-L=-2(a_{n-1}-L)$. Repetând de $n-1$ ori: $a_n-L=(-2)^{n-1}(a_1-L)$.

Pasul 3. Calculăm $a_1-L=b-2a-b/3=(2/3)(b-3a)$. Deci $a_n=b/3+(2/3)(b-3a)(-2)^{n-1}$.

Pasul 4. Dacă $b=3a$, coeficientul puterii este zero și șirul este constant $b/3$. Altfel, $|-2|>1$: termenul alternativ crește în modul și nu are limită.

Pasul 5. Pentru al doilea șir, punctul fix rezolvă $L=(b-L)/2$, deci din nou $L=b/3$. Scădem L: $a'_n-L=-(1/2)(a'_{n-1}-L)$.

Pasul 6. Inițial $a'_1-L=(b-a)/2-b/3=(b-3a)/6$. Prin urmare $a'_n=b/3+[(b-3a)/6](-1/2)^{n-1}$. Deoarece puterea $(-1/2)^{n-1}\to 0$, al doilea șir converge întotdeauna la $b/3$.

Răspuns final

$a_n=b/3+(2/3)(b-3a)(-2)^{n-1}$: convergent numai dacă $b=3a$. $a'_n=b/3+[(b-3a)/6](-1/2)^{n-1}\to b/3$.

Verifică dacă ai înțeles

Compară factorii de eroare: -2 amplifică și schimbă semnul, pe când $-1/2$ schimbă semnul dar micșorează eroarea la jumătate.

EXERCIȚIUL 1.88

Enunț: p. 30; soluție originală: p. 72.

Enunțul problemei

$a_0>0$, $k>0$, $a_n=\sqrt{a_{n-1}}+k$ pentru $n\geq 1$. Demonstrați convergența și aflați limita.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Semnul radicalului acoperă doar termenul a_{n-1}; $+k$ este în afara radicalului. Această citire este esențială pentru rezultat.

2. Dacă a_n se stabilizează către L, limita trebuie să satisfacă $L=\sqrt{L}+k$. Aceasta este ecuația unui punct fix.

3. Funcția $f(x)=\sqrt{x}+k$ este strict crescătoare pentru $x\geq 0$. Acest lucru ne ajută să demonstrăm monotonia șirului.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Căutăm mai întâi punctul fix: $L=\sqrt{L}+k$. Punem $t=\sqrt{L}\geq 0$, deci $L=t^2$ și $t^2=t+k$. Rezolvăm $t^2-t-k=0$.

Pasul 2. Rădăcina pozitivă este $t=[1+\sqrt{(1+4k)}]/2$. Apoi $L=t^2=t+k=[1+2k+\sqrt{(1+4k)}]/2$.

Pasul 3. Dacă $a_0<L$, deoarece f este crescătoare, $a_1=f(a_0)<f(L)=L$. În plus, pentru $0<x<L$, avem $f(x)>x$ (se verifică folosind $t=\sqrt{x}$). Deci $a_0<a_1<L$.

Pasul 4. Repetăm același raționament pentru fiecare termen: șirul este crescător și rămâne sub L. Orice șir crescător mărginit superior are limită.

Pasul 5. Dacă $a_0>L$, argumentul se inversează: $f(a_0)<a_0$, dar $f(a_0)>f(L)=L$. Șirul este descrescător și rămâne deasupra lui L. Dacă $a_0=L$, este constant.

Pasul 6. În toate cazurile există o limită. Trecând la limită în recurență, obținem ecuația punctului fix, a cărei soluție nenegativă este L calculat.

Răspuns final

$L=[1+2k+\sqrt{(1+4k)}]/2$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $k=2$, $L=[5+3]/2=4$. Verificăm: $\sqrt{4}+2=2+2=4$.

EXERCIȚIUL 1.89

Enunț: p. 31; soluție originală: p. 73.

Enunțul problemei

$a_1=ka$ $(a,k>0)$; $a_n=(a^3/a_{n-1}^2+2a_{n-1})/3$ $(n\geq 2)$. (1) Când poate $a_m=a$? (2) Când lim $a_n=a$?

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. $a>0$ este valoarea-țintă, iar $k>0$ determină primul termen.

2. Media aritmetică a trei numere pozitive este cel puțin media lor geometrică. De exemplu, pentru $A,B,C>0$: $(A+B+C)/3\geq\sqrt[3]{(ABC)}$.

3. Vom utiliza această inegalitate pentru a demonstra simultan că termenii se află peste a și că apoi scad.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Dacă $k=1$, $a_1=a$, iar formula de recurență dă $a_2=(a^3/a^2+2a)/3=a$. Prin inducție, toți termenii sunt a.

Pasul 2. Dacă $k\neq 1$, calculăm pentru $n\geq 2$ diferența: $a_n-a=[a^3+2a_{n-1}^3-3a\cdot a_{n-1}^2]/(3a_{n-1}^2)$. Numărătorul se poate factoriza drept $(a_{n-1}-a)^2(2a_{n-1}+a)$.

Pasul 3. Numitorul și factorul $2a_{n-1}+a$ sunt pozitivi; pătratul este strict pozitiv dacă $a_{n-1}\neq a$. Prin urmare, dintr-un termen inițial diferit de a nu putem ajunge exact la a după un număr finit de pași. Răspunsul la (1) este $k=1$.

Pasul 4. Pentru orice $n\geq 2$ aplicăm AM–GM numerelor a^3/a_{n-1}^2, a_{n-1}, a_{n-1}. Produsul lor este a^3, iar media geometrică a. Rezultă $a_n\geq a$.

Pasul 5. După $n=2$, termenul anterior este cel puțin a. Calculăm $a_n-a_{n-1}=[a^3-a_{n-1}^3]/(3a_{n-1}^2)\leq 0$. Șirul de la al doilea termen încolo este descrescător și mărginit inferior de a.

Pasul 6. Are deci limită $l\geq a$. În recurență rezultă $3l=a^3/l^2+2l$; după înmulțire cu l^2, $l^3=a^3$. Fiind pozitive, $l=a$.

Răspuns final

(1) $a_m=a$ pentru un m natural $\Leftrightarrow k=1$. (2) lim $a_n=a$ pentru orice $k>0$.

Verifică dacă ai înțeles

Este importantă deosebirea dintre „atinge exact ținta într-un pas finit” și „se apropie de țintă oricât de mult”.

EXERCIȚIUL 1.90

Enunț: p. 31; soluție originală: pp. 73–74.

Enunțul problemei

$x_n=a\cdot x_{n-1}+b$, unde $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $b\in\mathbb{R}$; exprimați x_n prin x_1,a,b și aflați limita.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Acest șir se obține repetând aceeași operație: înmulțim termenul anterior cu a, apoi adunăm b.

2. Un punct fix L este un număr neschimbat de această operație: $L=aL+b$. Pentru $a\neq 1$ rezultă $L=b/(1-a)$.

3. Când scădem L din recurență, termenul b dispare și rămâne o progresie geometrică.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Calculăm L din ecuația $L=aL+b$: $(1-a)L=b$, deci $L=b/(1-a)$.

Pasul 2. Scădem L din ambele membre: $x_n-L=a\,x_{n-1}+b-L=a(x_{n-1}-L)$, deoarece $b=(1-a)L$.

Pasul 3. Repetăm această egalitate: $x_2-L=a(x_1-L)$, $x_3-L=a^2(x_1-L)$, iar în general $x_n-L=a^{n-1}(x_1-L)$.

Pasul 4. Obținem formula explicită $x_n=b/(1-a)+[x_1-b/(1-a)]a^{n-1}$.

Pasul 5. Dacă $-1<a<1$ (cu $a\neq 0$, conform enunțului), puterea a^{n-1} tinde la zero, deci $x_n\to b/(1-a)$. Dacă $x_1=L$, șirul este constant L indiferent de valoarea permisă a lui a.

Pasul 6. Dacă $x_1\neq L$ și $a>1$, termenul a^{n-1} crește către $+\infty$, deci limita este $+\infty$ sau $-\infty$ după semnul coeficientului. Dacă $a\leq -1$, termenul cu putere schimbă semnul și nu există limită: pentru $a=-1$ oscilează între două valori, iar pentru $a<-1$ oscilațiile cresc în modul.

Răspuns final

$x_n=b/(1-a)+[x_1-b/(1-a)]a^{n-1}$. Limita este $b/(1-a)$ dacă $|a|<1$ sau $x_1=b/(1-a)$; pentru $a>1$ și x_1 diferit de punctul fix este $\pm\infty$; pentru $a\leq -1$ și x_1 diferit de punctul fix limita nu există.

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu: dacă $a=-1,b=2,x_1=0$, termenii sunt 0,2,0,2,... și nu se apropie de o singură valoare.

Notă pentru o lecție viitoare: Analiza include în mod explicit și valorile negative ale lui a, astfel încât toate situațiile din ipoteza enunțului să fie acoperite.

EXERCIȚIUL 1.91

Enunț: p. 31; soluție originală: pp. 74–75.

Enunțul problemei

$1<a_1<b_1$; $a_n=b_{n-1}/a_{n-1}$, $b_n=(b_{n-1}-1)/(a_{n-1}-1)$, $n\geq 2$. Pentru ce valori inițiale sunt ambele șiruri convergente?

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Avem două recurențe care se influențează reciproc. Ca să obținem a_3, trebuie cunoscute atât a_2, cât și b_2.

2. O succesiune periodică repetă aceleași valori după un anumit număr de pași. Dacă nu este constantă, nu poate converge: o valoare se repetă la infinit la distanță de alta.

3. Vom calcula câțiva pași cu simboluri, având grijă că $a_1>1$ asigură numitori nenuli în formula inițială.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Notăm $x=a_1$ și $y=b_1$, cu $1<x<y$. Al doilea pas dă $a_2=y/x$ și $b_2=(y-1)/(x-1)$.

Pasul 2. La pasul trei, $a_3=b_2/a_2=x(y-1)/[y(x-1)]$; iar $b_3=(b_2-1)/(a_2-1)=x/(x-1)$.

Pasul 3. Continuând operațiile și simplificările algebrice, obținem $a_4=y/(y-1)$, $b_4=y/(y-x)$, $a_5=(y-1)/(y-x)$, $b_5=x(y-1)/(y-x)$.

Pasul 4. La pasul șase, $a_6=b_5/a_5=x$, iar $b_6=(b_5-1)/(a_5-1)=y$. Am revenit exact la valorile inițiale. Așadar fiecare șir este periodic de perioadă ce divide 5.

Pasul 5. Un șir periodic convergent trebuie să fie constant. Punem $a_1=a_2=x$ și $b_1=b_2=y$. Prima egalitate dă $x=y/x$, adică $y=x^2$. A doua dă $y=(y-1)/(x-1)$.

Pasul 6. Introducem $y=x^2$ în a doua relație: $x^2(x-1)=x^2-1$. Simplificăm: $x^3-2x^2+1=0=(x-1)(x^2-x-1)$. Deoarece $x>1$, soluția permisă este $x=(1+\sqrt{5})/2$.

Pasul 7. Atunci $y=x^2=x+1=(3+\sqrt{5})/2$. Aceste valori produc șiruri constante, deci convergente. Nu există alte perechi inițiale cu proprietatea cerută.

Răspuns final

$a_1=(1+\sqrt{5})/2$ și $b_1=(3+\sqrt{5})/2$, singura pereche permisă.

Verifică dacă ai înțeles

Din formula $b_1=a_1^2$ se poate verifica imediat $a_2=a_1$. Verifică separat și $b_2=b_1$.

EXERCIȚIUL 1.92

Enunț: p. 31; soluție originală: p. 75.

Enunțul problemei

$a_1=\sqrt[3]{6}$; $a_n=\sqrt[3]{(6+a_{n-1})}$, $n\geq 2$. Demonstrați convergența și calculați limita.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Rădăcina cubică $\sqrt[3]{x}$ este numărul care, ridicat la puterea a treia, produce x. De pildă, $\sqrt[3]{8}=2$.

2. Un șir crescător care nu depășește un prag fix este convergent. Vom demonstra aceste două proprietăți, nu doar le vom afirma.

3. Funcția $\sqrt[3]{x}$ este crescătoare: dacă $A<B$, atunci $\sqrt[3]{A}<\sqrt[3]{B}$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Mai întâi $a_1=\sqrt[3]{6}<2$, deoarece $6<8=2^3$. Totodată $a_1>0$.

Pasul 2. Dacă $a_{n-1}<2$, atunci $6+a_{n-1}<8$, deci $a_n=\sqrt[3]{(6+a_{n-1})}<\sqrt[3]{8}=2$. Prin inducție toți termenii sunt sub 2.

Pasul 3. Comparăm primii doi termeni: $a_2=\sqrt[3]{(6+a_1)}>\sqrt[3]{6}=a_1$, deoarece $a_1>0$.

Pasul 4. Presupunem $a_n>a_{n-1}$. Adunăm 6, apoi extragem rădăcina cubică, care păstrează ordinea: $a_{n+1}=\sqrt[3]{(6+a_n)}>\sqrt[3]{(6+a_{n-1})}=a_n$. Deci șirul este crescător.

Pasul 5. Este crescător și mărginit superior de 2, deci are limită $L\leq 2$. Trecem la limită în ecuația $a_n^3=6+a_{n-1}$: $L^3=6+L$.

Pasul 6. Scriem $L^3-L-6=0$. Observăm că $L=2$ satisface egalitatea: $8-2-6=0$. Factorizăm $(L-2)(L^2+2L+3)=0$. Al doilea factor este mereu pozitiv, deci singura soluție reală este $L=2$.

Răspuns final

$L=2$.

Verifică dacă ai înțeles

Încearcă două-trei iterații pe calculator: valorile pornesc sub 2 și se apropie de 2 fără să o depășească.

EXERCIȚIUL 1.93

Enunț: p. 31; soluție originală: pp. 75–76.

Enunțul problemei

$a_n=a+n+1-\Sigma(k=1\ldots n)(k^4+k^2+1)/(k^4+k)$, $a\in\mathbb{R}$. (1) Dovediți convergența. (2) Găsiți primul rang pentru $|a_n-a|<0{,}01$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Litera Σ indică o sumă. Pentru n=3, $\Sigma(k=1\ldots3)F(k)=F(1)+F(2)+F(3)$.

2. Fracțiile complicate pot ascunde o descompunere simplă în termeni care se anulează reciproc. Această tehnică se numește telescopare.

3. Trebuie să distingem între inegalitățile $<$ și $\leq$ la calculul primului rang.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Rescriem numitorul: $k^4+k=k(k^3+1)$, iar $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$.

Pasul 2. Verificăm identitatea: $(k^4+k^2+1)/(k^4+k)=1+1/[k(k+1)]$. Într-adevăr, diferența dintre numărător și numitor este k^2-k+1, exact factorul care rămâne după simplificare.

Pasul 3. Descompunem $1/[k(k+1)] =1/k-1/(k+1)$. Egalitatea se verifică reunind fracțiile: $[(k+1)-k]/[k(k+1)]=1/[k(k+1)]$.

Pasul 4. Sumăm: $\Sigma(k=1\ldots n)[1+1/k-1/(k+1)]=n+(1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+(1/n-1/(n+1))=n+1-1/(n+1)$.

Pasul 5. Înlocuim în enunț: $a_n=a+n+1-[n+1-1/(n+1)]=a+1/(n+1)$. Rezultă imediat că $a_n\to a$.

Pasul 6. Condiția $|a_n-a|<0{,}01$ devine $1/(n+1)<1/100$. Deoarece numitorul e pozitiv, $n+1>100$, adică $n\geq100$ pentru n natural. Dacă s-ar fi cerut $\leq0{,}01$, ar fi fost suficient $n\geq99$.

Răspuns final

$a_n=a+1/(n+1)\to a$; pentru $|a_n-a|<0{,}01$ avem $n\geq100$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică pentru n=99: diferența este exact 0,01, deci nu respectă semnul strict „<”. Pentru n=100 este $1/101<0{,}01$.

Notă pentru o lecție viitoare: Cartea folosește într-un loc semnul $\leq0{,}01$. Pentru enunțul cu $<0{,}01$, primul rang corect este 100, nu 99.

EXERCIȚIUL 1.94

Enunț: p. 32; soluție originală: pp. 76–77.

Enunțul problemei

> $a_1=r\geq 0$, $a_{n+1}=(b+a_n^2)/k$, $k>0$, $0\leq b\leq k^2/4$ și $r\in[0,(k+\sqrt{(k^2-4b)})/2]$. Studiați dacă limita este independentă de r.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aceasta este o recurență neliniară: apare pătratul termenului anterior.

2. Condiția $0\leq b\leq k^2/4$ garantează că $k^2-4b\geq 0$ și, deci, radicalul $\sqrt{(k^2-4b)}$ este real.

3. Vom căuta punctele fixe, apoi vom arăta către care dintre ele se îndreaptă șirul în funcție de r.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Un punct fix L trebuie să satisfacă $L=(b+L^2)/k$. Înmulțim cu k: $L^2-kL+b=0$. Rădăcinile sunt $r_-=[k-\sqrt{(k^2-4b)}]/2$ și $r_+=[k+\sqrt{(k^2-4b)}]/2$, cu $0\leq r_-\leq r_+$.

Pasul 2. Notăm $f(x)=(b+x^2)/k$. Pentru $x\geq 0$, f este crescătoare, deoarece dacă $0\leq x<y$ atunci $x^2<y^2$. Mai mult $f(x)-x=[(x-r_-)(x-r_+)]/k$.

Pasul 3. Dacă $0\leq r<r_-$, ambii factori $x-r_-$ și $x-r_+$ sunt negativi, deci $f(r)>r$; dar $f(r)<f(r_-)=r_-$. Prin inducție șirul crește și rămâne sub r_-.

Pasul 4. Dacă $r_-<r<r_+$, primul factor este pozitiv și al doilea negativ, deci $f(r)<r$; fiind f crescătoare și $f(r)>f(r_-)=r_-$, șirul scade și rămâne deasupra lui r_-.

Pasul 5. Dacă $r=r_-$, șirul este constant r_-. Prin urmare, pentru toate $r\in[0,r_+)$, limita este r_-.

Pasul 6. **Excepția decisivă:** dacă $r=r_+$ și $r_+>r_-$, avem $f(r_+)=r_+$, deci șirul este constant r_+, iar limita NU este r_-. Când cele două rădăcini coincid ($b=k^2/4$), excepția dispare.

Răspuns final

> Pentru $0\leq r<r_+$: $\lim a_n=r_-$. Pentru $r=r_+$: $\lim a_n=r_+$. Limita este independentă de r numai dacă se exclude capătul r_+ (sau dacă $r_-=r_+$).

Verifică dacă ai înțeles

Contraexemplu: alege $k=2$ și $b=0$. Atunci $r_-=0$, $r_+=2$. Dacă $r=0$, șirul rămâne 0; dacă $r=2$, șirul rămâne 2. Au limite diferite.

Notă pentru o lecție viitoare: Enunțul tipărit și rezolvarea sa omit excepția de la capătul superior al intervalului. Această notă trebuie păstrată vizibil la publicare.

EXERCIȚIUL 1.95

Enunț: p. 32; soluție originală: pp. 77–78.

Enunțul problemei

$a_n=\sqrt{(\alpha a_{n-1}+\beta)}$, cu $\alpha,\beta,a_0>0$ și $a_0^2-\alpha a_0-\beta<0$. Arătați convergența și calculați limita.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici radicalul cuprinde întreaga expresie $\alpha a_{n-1}+\beta$.

2. Condiția $a_0^2-\alpha a_0-\beta<0$ spune, în esență, că primul termen se află sub punctul fix pozitiv.

3. Vom folosi faptul că radicalul este crescător și că șirurile crescătoare mărginite au limită.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Căutăm $L>0$ care verifică $L=\sqrt{(\alpha L+\beta)}$. Ridicăm la pătrat: $L^2-\alpha L-\beta=0$. Soluțiile sunt $[\alpha\pm\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}]/2$.

Pasul 2. Deoarece $\beta>0$, $\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}>\alpha$; rădăcina cu semnul minus este negativă. Singurul punct fix pozitiv este $R=[\alpha+\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}]/2$.

Pasul 3. Din $a_0^2-\alpha a_0-\beta<0$ și $a_0>0$ rezultă $a_0<R$. De asemenea $a_1=\sqrt{(\alpha a_0+\beta)}>a_0$: comparăm pătratele pozitive $a_1^2=\alpha a_0+\beta>a_0^2$.

Pasul 4. Dacă $a_{n-1}>a_{n-2}$, atunci $\alpha a_{n-1}+\beta>\alpha a_{n-2}+\beta$; extragem radicalul și obținem $a_n>a_{n-1}$. Așadar șirul este crescător.

Pasul 5. În același timp, dacă $a_{n-1}<R$, atunci $a_n=\sqrt{(\alpha a_{n-1}+\beta)}<\sqrt{(\alpha R+\beta)}=R$. Prin inducție rămâne sub R.

Pasul 6. Fiind crescător și mărginit de R, converge. Limita trebuie să rezolve $L=\sqrt{(\alpha L+\beta)}$, deci este R.

Răspuns final

$L=[\alpha+\sqrt{(\alpha^2+4\beta)}]/2$.

Verifică dacă ai înțeles

Exemplu: $\alpha=1,\beta=2,a_0=1$. Punctul fix este $R=2$, iar $a_0^2-\alpha a_0-\beta=-2<0$. Valorile cresc spre 2.

EXERCIȚIUL 1.96

Enunț: p. 32; soluție originală: pp. 78–79.

Enunțul problemei

(1) $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}\cos x+\cos[(n-1)x]$ pentru $n\geq 2$; (2) $a_1=1$, $a_2=2\cos x$, $a_n=2a_{n-1}\cos x-a_{n-2}$ pentru $n\geq 3$. Determinați termenul general în fiecare caz.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Cosinusul și sinusul sunt funcții trigonometrice. Identitatea $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ permite transformarea sumelor.

2. Formula $\sin(nx)/\sin x$ poate fi utilizată direct doar când $\sin x\neq 0$. Dacă x este multiplu întreg al lui π, trebuie să verificăm separat limita sau recurența.

3. O demonstrație prin inducție constă în verificarea unui prim termen și în arătarea că formula continuă să fie adevărată la fiecare pas.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Considerăm mai întâi cazul $\sin x\neq 0$. Pentru prima recurență, $n=1$ dă $a_1=\sin x/\sin x=1$. Presupunem $a_{n-1}=\sin[(n-1)x]/\sin x$.

Pasul 2. Atunci $a_n=\sin[(n-1)x]\cos x/\sin x+\cos[(n-1)x]$. Aducem la același numitor: $[\sin((n-1)x)\cos x+\cos((n-1)x)\sin x]/\sin x$.

Pasul 3. Identitatea sinusului unei sume arată că numărătorul este $\sin(nx)$. Rezultă $a_n=\sin(nx)/\sin x$.

Pasul 4. Pentru a doua recurență, verificăm primele două valori: $\sin x/\sin x=1$ și $\sin 2x/\sin x=2\cos x$. Presupunem formula pentru $n-1$ și $n-2$.

Pasul 5. Obținem $a_n=[2\cos x\cdot\sin((n-1)x)-\sin((n-2)x)]/\sin x$. Identitatea $2\cos x\sin((n-1)x)=\sin(nx)+\sin((n-2)x)$ reduce numărătorul la $\sin(nx)$. Deci și aici $a_n=\sin(nx)/\sin x$.

Pasul 6. Cazul special $x=m\pi$: atunci $\cos x=(-1)^m$ și $\sin x=0$. Recurențele se verifică direct și dau $a_n=n(-1)^{m(n-1)}$ pentru ambele șiruri; formula cu împărțire la $\sin x$ nu poate fi aplicată fiindcă am împărți la zero.

Răspuns final

Pentru ambele: $a_n=\sin(nx)/\sin x$ dacă $\sin x\neq 0$; dacă $x=m\pi$, $a_n=n(-1)^{m(n-1)}$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $x=0$ formula specială devine $a_n=n$: verificăm recurența $1,2,3,4,\ldots$. Pentru $x=\pi$ obținem $1,-2,3,-4,\ldots$.

EXERCIȚIUL 1.97

Enunț: p. 32; soluție originală: p. 80.

Enunțul problemei

$u_1=3$, $u_2=10$; $u_{n+2}-7u_{n+1}+12u_n=6n+1$ pentru $n\geq 1$. Calculați u_n și limita.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Partea stângă depinde de trei termeni ai șirului și este liniară. Partea dreaptă nu este zero: se numește termenul neomogen.

2. Metoda este să găsim întâi soluțiile ecuației fără termenul $6n+1$, apoi să adăugăm o soluție particulară potrivită, de forma $An+B$.

3. O putere cu baza 4 crește mai repede decât una cu baza 3: $4^n-3^n=4^n[1-(3/4)^n]\to+\infty$.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru partea omogenă, încercăm $u_n=r^n$. Apare $r^2-7r+12=0=(r-3)(r-4)$, deci soluția omogenă este $A\cdot 3^n+B\cdot 4^n$.

Pasul 2. Căutăm o soluție particulară $u_n=Cn+D$. Înlocuim în expresia $u_{n+2}-7u_{n+1}+12u_n$ și grupăm termenii: $(1-7+12)Cn=6Cn$; termenul constant este $6D+(2-7)C=6D-5C$.

Pasul 3. Comparăm cu $6n+1$: din $6C=6$ rezultă $C=1$, iar $6D-5=1$ dă $D=1$. Soluția particulară este $n+1$.

Pasul 4. Prin urmare $u_n=A\cdot 3^n+B\cdot 4^n+n+1$. Punem $n=1$: $3A+4B+2=3$, deci $3A+4B=1$. Punem $n=2$: $9A+16B+3=10$, deci $9A+16B=7$.

Pasul 5. Înmulțim prima ecuație cu 3: $9A+12B=3$. Scădem din a doua: $4B=4$, deci $B=1$, apoi $A=-1$. Rezultă $u_n=4^n-3^n+n+1$.

Pasul 6. Factorizăm termenii exponențiali: $4^n-3^n=4^n[1-(3/4)^n]$. Paranteza tinde la 1, iar 4^n la $+\infty$. Adăugarea lui $n+1$ nu schimbă concluzia.

Răspuns final

$u_n=4^n-3^n+n+1$; $\lim u_n=+\infty$.

Verifică dacă ai înțeles

Verifică primele două valori: $n=1\to 4-3+2=3$; $n=2\to 16-9+3=10$.

EXERCIȚIUL 1.98

Enunț: p. 32; soluție originală: pp. 80–81.

Enunțul problemei

Dacă $\alpha_n \to L$ și $S_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, demonstrați că pentru orice $\varepsilon > 0$ există N astfel încât pentru $n \geq N$: $S_N + (n-N)L - n\varepsilon < S_n < S_N + (n-N)L + n\varepsilon$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Definiția convergenței $\alpha_n \to L$ afirmă că, pentru orice toleranță $\varepsilon > 0$, de la un anumit rang încolo fiecare termen se află între $L - \varepsilon$ și $L + \varepsilon$.

2. S_n este suma primilor n termeni, iar S_N este suma primilor N. Diferența $S_n - S_N$ cuprinde exact $n - N$ termeni.

3. Când adunăm două inegalități de același sens, obținem o nouă inegalitate validă.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Alegem un $\varepsilon > 0$. Din convergența lui α_n rezultă că există N astfel încât pentru fiecare $k > N$ avem $L - \varepsilon < \alpha_k < L + \varepsilon$.

Pasul 2. Adunăm inegalitățile pentru $k = N+1, N+2, \ldots, n$. Sunt $n - N$ termeni, deci $(n-N)(L-\varepsilon) < \alpha_{N+1} + \ldots + \alpha_n < (n-N)(L+\varepsilon)$.

Pasul 3. Observăm că $\alpha_{N+1} + \ldots + \alpha_n = S_n - S_N$. Adunăm S_N în toate cele trei părți: $S_N + (n-N)L - (n-N)\varepsilon < S_n < S_N + (n-N)L + (n-N)\varepsilon$.

Pasul 4. Cum $n - N \leq n$, inegalitățile rămân adevărate dacă lărgim intervalul: în stânga scădem $n\varepsilon$ în loc de $(n-N)\varepsilon$; în dreapta adăugăm $n\varepsilon$. Obținem exact cerința.

Pasul 5. La $n = N$, inegalitatea strictă cerută rămâne adevărată deoarece $S_N - N\varepsilon < S_N < S_N + N\varepsilon$, pentru $\varepsilon > 0$ și $N > 0$.

Răspuns final

$S_N + (n-N)L - n\varepsilon < S_n < S_N + (n-N)L + n\varepsilon$, pentru $n \geq N$ ales suficient de mare.

Verifică dacă ai înțeles

Nu am înlocuit fiecare α_k cu L; fiecare diferă de L cu mai puțin de ε, iar erorile celor $n - N$ termeni pot însuma cel mult $(n-N)\varepsilon$.

EXERCIȚIUL 1.99

Enunț: p. 33; soluție originală: pp. 81–82.

Enunțul problemei

$x_0>0$, $a>0$, $x_{n+1}=(x_n+a/x_n)/2$. (1) Monotonie și mărginire. (2) Formulă explicită. (3) Limită.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aceasta este o metodă clasică de aproximare a rădăcinii pătrate: pentru a aproxima $\sqrt{a}$, facem media dintre x și a/x.

2. Relația este corect definită deoarece termenii sunt pozitivi, deci nu împărțim la zero.

3. Vom nota $r=\sqrt{a}$ și vom folosi identitatea $(x-r)^2\geq 0$, adevărată pentru orice număr real x.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru $x>0$: $(x+a/x)/2-r=[x^2-2rx+r^2]/(2x)=(x-r)^2/(2x)\geq 0$. În consecință $x_1\geq r$ și toți termenii următori rămân cel puțin r.

Pasul 2. Dacă $x\geq r$, atunci $a/x=r^2/x\leq x$. Media $(x+a/x)/2$ este cel mult x. Astfel, de la x_1 încolo, șirul este descrescător și mărginit inferior de r. Dacă $x_0<r$, primul pas poate fi crescător, deci nu afirmăm nejustificat monotonia de la rangul zero.

Pasul 3. Pentru formula exactă calculăm un raport al erorilor: $[x_{n+1}-r]/[x_{n+1}+r]=[(x_n-r)/(x_n+r)]^2$. Se obține înmulțind numărătorii și numitorii cu $2x_n$ și folosind $x_n^2+a\pm 2rx_n=(x_n\pm r)^2$.

Pasul 4. Punem $q=(x_0-r)/(x_0+r)$. Deoarece $x_0,r>0$, avem $|q|<1$. Raportul erorilor la pasul n este $q^{\{2^n\}}$.

Pasul 5. Rezolvăm ecuația $(x_n-r)/(x_n+r)=q^{\{2^n\}}$ pentru x_n: $x_n=r(1+q^{\{2^n\}})/(1-q^{\{2^n\}})$. Aceasta este formula explicită cerută.

Pasul 6. Cum $|q|<1$, puterea $q^{\{2^n\}}$ tinde la zero extrem de repede. Rezultă $x_n\to r=\sqrt{a}$. Și demonstrația prin monotonie conduce la aceeași limită.

Răspuns final

$x_n=\sqrt{a}\cdot[1+q^{\{2^n\}}]/[1-q^{\{2^n\}}]$, $q=(x_0-\sqrt{a})/(x_0+\sqrt{a})$; $\lim x_n=\sqrt{a}$.

Verifică dacă ai înțeles

Dacă $a=9$ și $x_0=2$, atunci $x_1=(2+9/2)/2=3{,}25$, iar $x_2\approx 3{,}0096$. Observă apropierea rapidă de 3.

EXERCIȚIUL 1.100

Enunț: p. 33; soluție originală: pp. 82–83.

Enunțul problemei

$x_0=1$, $x_i=[(n-1)x_{i-1}+a/x_{i-1}^{(n-1)}]/n$ ($i\geq 1$), unde $n\geq 2$ este un număr natural FIX, iar $0<a<1$. Dovediți că $\lim(i\to\infty)x_i=\sqrt[n]{a}$.

Ce trebuie să știm înainte de rezolvare

1. Aici apar două litere cu roluri diferite: n stabilește ordinul rădăcinii și rămâne fix; i este indicele șirului și tinde la infinit.

2. Expresia a/x^{n−1} înseamnă a împărțit la puterea n−1 a lui x. Deoarece începem cu $x_0=1>0$, vom vedea că toți termenii rămân pozitivi.

3. Media aritmetică a n numere pozitive este cel puțin media lor geometrică. Vom aplica regula la n−1 copii ale lui x și la numărul a/x^{n−1}.

Rezolvare pas cu pas

Pasul 1. Pentru $x>0$, luăm numerele x,x,...,x (n−1 exemplare) și a/x^{n−1}. Produsul tuturor este $x^{n-1}\cdot a/x^{n-1}=a$. Media lor aritmetică este $[(n-1)x+a/x^{n-1}]/n$.

Pasul 2. Inegalitatea mediilor spune că această medie este cel puțin rădăcina de ordin n din produs: $[(n-1)x+a/x^{n-1}]/n\geq\sqrt[n]{a}$. Prin urmare $x_i\geq\sqrt[n]{a}$ pentru fiecare $i\geq 1$.

Pasul 3. Avem $x_0=1$ și $0<a<1$, deci $x_0>\sqrt[n]{a}$. Din pasul anterior, toți termenii sunt pozitivi, iar recurența se poate aplica de oricâte ori.

Pasul 4. Dacă $x\geq\sqrt[n]{a}$, atunci $x^n\geq a$ și deci $a/x^{n-1}\leq x$. Introducând aceasta în recurență, obținem $x_i\leq[(n-1)x_{i-1}+x_{i-1}]/n=x_{i-1}$. Șirul este descrescător.

Pasul 5. Șirul este descrescător și mărginit inferior de $\sqrt[n]{a}>0$, deci converge la o limită $l\geq\sqrt[n]{a}$.

Pasul 6. Trecem la limită în $x_i=[(n-1)x_{i-1}+a/x_{i-1}^{n-1}]/n$. Deoarece $l>0$, putem împărți și la limită: $nl=(n-1)l+a/l^{n-1}$.

Pasul 7. Scădem $(n-1)l$ din ambele părți: $l=a/l^{n-1}$. Înmulțim cu l^{n-1}: $l^n=a$. Limita l este pozitivă, deci $l=\sqrt[n]{a}$.

Răspuns final

$\lim(i\to\infty)x_i=\sqrt[n]{a}$ pentru orice ordin fix $n\geq 2$ și orice $0<a<1$.

Verifică dacă ai înțeles

Pentru $n=2$, metoda se reduce la $x_i=(x_{i-1}+a/x_{i-1})/2$, exact metoda din exercițiul 1.99. Pentru $n=3$, pornind de la $x_0=1$, $x_1=(2+a)/3$.

Notă pentru o lecție viitoare: În această problemă indicele șirului este i, nu n. Confundarea lor conduce la interpretări greșite; de aceea am rescris enunțul subliniind că n rămâne fix.

NOTE EDITORIALE

În versiunea destinată site-ului, fiecare exercițiu poate deveni o pagină individuală și poate trimite la lecțiile fundamentale („Puteri”, „Radicali”, „Proprietăți ale limitelor”, „Numărul e”, „Sume”, „Stolz–Cesàro”).

Materialul acoperă întregul set de 100 de probleme din scanare. Este un prim manuscris pentru dezvoltarea unei biblioteci digitale și nu substituie verificarea finală în echipă a fiecărei formule și demonstrații înainte de publicare. În particular, au fost identificate și semnalate inadvertențe în soluțiile tipărite (de exemplu, 1.67 și 1.94).

Pentru actualizări ulterioare, păstrați numerotarea 1.1–1.100; fiecare exercițiu este separat și ca fișier Markdown. Când se adaugă versiuni revizuite, se recomandă un istoric al corecțiilor și o verificare independentă a rezultatului.